Einige Ausführungen zur Distributionentheorie

Erinnern wir uns an die Modellierung der eingespannten schwingenden Saite. Diese soll in Ruhe sein. Nun schlagen wir diese einmal an. Dann stellt sich eine Bewegung ein.

Frage: Durch welches mathematische Modell wird diese Bewegung beschrieben?

Randbedingung: $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad$ für $\quad t \geq 0$,
Anfangsbedingungen: $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$,
partielle Differentialgleichung: $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$.

Die Quelle f soll das "Anschlagen" modellieren. Wie modelliert man aber eine Quelle, die zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ortspunkt $x = \frac{L}{2}$, also in der Mitte der Saite, das Anschlagen berücksichtigt, die aber in jedem Punkt $(x,0)$ mit $x \in [0,L] \setminus \{\frac{L}{2}\}$ oder in $(x,t) \in [0,L] \times \{t > 0\}$ gleich 0 ist? Damit beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt.

1 Modellierung der Dichte einer Punktmasse der Masse 1

Wir gehen aus von einer hinreichend kleinen Kugel um den Ursprung im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ der Masse 1 und dem Radius ε. Setzen wir eine homogene Massenverteilung voraus, dann berechnet sich die Massendichte zu

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} & \text{für} \quad |x| \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{für} \quad |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Als Masse m_ε erhalten wir $m_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(x)dx = \int_{|x|\leq\varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\, dx = 1$. Konvergiert nun $\varepsilon \to 0$, dann strebt $m_\varepsilon \to 1$ und ρ_ε formal gegen

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad x = 0, \\ 0 & \text{für} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Es gilt aber $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(x)dx = 0$ als Integral im Lebesgueschen Sinne, im Widerspruch zu $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} m_\varepsilon = 1$. Damit ist $\delta(x)$ auf obige Weise nicht vernünftig modelliert.

Ein sinnvoller Zugang besteht darin, daß man ρ_ε und δ als Verteilungen (Distributionen) interpretiert und deren Wirkungen auf eine Klasse von sogenannten Testfunktionen erklärt.

Definition 1.1. *Es sei G ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$, d.h. G ist eine offene und zusammenhängende Menge. Mit $C_0^\infty(G)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $\phi = \phi(x)$ mit folgenden Eigenschaften:*

- *jede Funktion ϕ ist in dem Gebiet G definiert;*
- *jede Funktion ϕ ist in dem Gebiet G beliebig oft differenzierbar, d.h. jede Ableitung existiert,*
- *zu jeder Funktion ϕ existiert eine kompakte Menge, d.h. eine abgeschlossene und beschränkte Menge, K in G so, daß ϕ in $G \setminus K$ verschwindet, also $\phi \equiv 0$ in $G \setminus K$. Dabei hängt die kompakte Menge von ϕ ab.*

Man nennt jede solche Funktion Testfunktion. Als Träger der Testfunktion ϕ definieren wir

$$supp\ \phi = \overline{\{x \in G : \phi(x) \neq 0\}}.$$

Beispiele. 1. Vorgelegt sei die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-(x^2+y^2)}} & \text{für} \quad x^2+y^2<1, \\ 0 & \text{für} \quad 1 \le x^2+y^2 < 2. \end{cases}$$

Dann gehört f zum Raum $C_0^\infty(G)$ mit $G = \{(x,y) : x^2+y^2 < 2\}$.

2. Vorgelegt sei die Funktion $f(x,y) = e^{-\frac{1}{1-(x^2+y^2)}}$ für $x^2+y^2<1$. Dann gehört f zum Raum $C^\infty(G)$, aber nicht zum Raum $C_0^\infty(G)$ mit $G = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$.

Wir erklären nun die Wirkung der "Distribution" ρ_ε auf alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. In diesem Fall ist $G = \mathbb{R}^3$. Die Wirkung sei wie folgt definiert:

$\underbrace{\rho_\varepsilon(\phi)}_{\substack{\text{Wirkung von } \rho_\varepsilon \\ \text{auf Testfunktion } \phi}} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(x)\phi(x)dx.$

Nach Definition ist $\rho_\varepsilon(x) \neq 0$ für $|x| \le \varepsilon$, d.h.

$$\rho_\varepsilon(\phi) := \int_{|x|\le\varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\, \phi(x)dx.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \Big| \int_{|x|\le\varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\, \phi(x)dx - \phi(0) \Big| &= \Big| \int_{|x|\le\varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\, \phi(x)dx - \phi(0) \int_{|x|\le\varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\, dx \Big| \\ &= \Big| \int_{|x|\le\varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\, (\phi(x)-\phi(0))dx \Big| \\ &\le \max_{|x|\le\varepsilon} |\phi(x)-\phi(0)| \int_{|x|\le\varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\, dx = \max_{|x|\le\varepsilon} |\phi(x)-\phi(0)|. \end{aligned}$$

Da $\phi = \phi(x)$ als Testfunktion unendlich oft differenzierbar ist, ist ϕ natürlich stetig in $x = 0$. Damit gilt $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \max\limits_{|x|\le\varepsilon} |\phi(x)-\phi(0)| = 0$. Zusammenfassend haben wir gezeigt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon(\phi) = \phi(0)$$

für jede Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Man bezeichnet als Diracsche δ_0 – Distribution die Distribution, die jeder Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ihren Wert $\phi(0)$ im Nullpunkt zuordnet, d.h.

$$\delta_0 : \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \delta_0(\phi) = \phi(0).$$

Wirkung von δ_0 auf Testfunktion

Mit δ_{x_0} bezeichnen wir die Diracsche δ_{x_0} – Distribution mit der Wirkung

$$\delta_{x_0} : \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0).$$

Frage: Wie modellieren wir nun das Anschlagen der Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ortspunkt $x = \frac{L}{2}$?

Antwort: Die Quelle f wird beschrieben durch $f = \delta_{(x=\frac{L}{2},t=0)}$. Ihre Wirkung wird beschrieben durch

$$\delta_{(x=\frac{L}{2},t=0)} : \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \delta_{(x=\frac{L}{2},t=0)}(\phi) = \phi\Big(\frac{L}{2},0\Big).$$

2 Definition einer Distribution und Beispiele

Gegeben sei ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$. Wir wählen dazu die Menge aller Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(G)$. Zur Definition des Begriffes der Distribution benötigen wir die Topologie des Raumes der Testfunktionen $C_0^\infty(G)$. Erinnern wir uns zuerst an die Topologie des Raumes $C^\infty(G)$.

Frage: Was zeichnet Funktionen aus dem $C^\infty(G)$ aus?

Antwort: Es existieren alle partiellen Ableitungen in G. Zuerst fixieren wir eine reguläre kompakte Menge K aus G, d.h. die Menge K ist der Abschluß ihres Inneren. Dann existiert nach dem Satz von Weierstraß für jede Testfunktion ϕ der Ausdruck $p_{K,M}(\phi) = \max_{|\alpha|=M} \|D_x^\alpha \phi\|_{C(K)}$. Damit kommen wir zu folgender Definition:

Definition 2.1. *Es sei $\{K_n\}_n$ eine Folge regulärer kompakter Mengen, die ein gegebenes Gebiet G monoton ausschöpft, d.h. $G = \bigcup_n K_n$ und $K_n \subset K_m$ für $n \le m$. Dann versteht man unter dem Raum der glatten Funktionen $C^\infty(G)$ die Menge aller Funktionen $\phi = \phi(x)$ mit $p_{K_n,M}(\phi) < \infty$ für alle $M \in \mathbb{N}$. Eine Folge $\{\phi_m\}_m$ von Funktionen aus $C^\infty(G)$ konvergiert gegen ϕ aus $C^\infty(G)$ genau dann, wenn $\lim_{m\to\infty} p_{K_n,M}(\phi - \phi_m) = 0$ für alle $M \in \mathbb{N}$ gilt.*

Der Raum $C^\infty(G)$ ist ein spezieller lokalkonvexer Raum, er ist ein Frechet-Raum. Die Definition ist von der gewählten Folge $\{K_n\}_n$ unabhängig.

Aufgabe 1 Zeigen Sie, daß dieser Raum vollständig ist. Geben Sie eine Metrik in diesem Raum an.

Wir geben uns jetzt eine Folge $\{\phi_m\}_m$ von Funktionen aus $C_0^\infty(G)$ vor. Dann können wir zur Konvergenzuntersuchung formal Definition 2.1 anwenden. Als Grenzfunktion erhalten wir eine Funktion $\phi \in C^\infty(G)$. Wir können aber nicht erwarten, daß diese Funktion sogar im Raum $C_0^\infty(G)$ liegt.

Aufgabe 2 Machen Sie sich an einem Beispiel klar, daß zur Erklärung der Konvergenz in $C_0^\infty(G)$ die Definition 2.1 nicht ausreichend ist.

Definition 2.2. *Vorgelegt sei eine Folge $\{\phi_m\}_m$ von Funktionen aus $C_0^\infty(G)$, die der Trägerbedingung genügt, d.h. es existiert eine kompakte Menge $K \subset G$, in der alle Träger von ϕ_m, $m \in \mathbb{N}$ liegen.*
Dann konvergiert die Folge $\{\phi_m\}_m$ gegen ϕ aus $C_0^\infty(G)$ genau dann, wenn $\lim_{m\to\infty} p_{K_n,M}(\phi - \phi_m) = 0$ für alle $M \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei bezeichnet $\{K_n\}_n$ eine Folge regulärer kompakter Mengen, die das gegebene Gebiet G monoton ausschöpft.

Damit können wir den Begriff der Distribution einführen.

Definition 2.3. *Jede Abbildung $u : \phi \in C_0^\infty(G) \to u(\phi)$ nennt man Distribution (oder auch verallgemeinerte Funktion) wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- *jeder Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(G)$ wird eine komplexe Zahl $u(\phi)$, die Wirkung von u auf ϕ zugeordnet;*
- *die Abbildung u ist linear auf $C_0^\infty(G)$, d.h.*

  $$u(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = \lambda_1\, u(\phi_1) + \lambda_2\, u(\phi_2)$$

  für beliebige Testfunktionen $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(G)$ und beliebige komplexe Zahlen λ_1, λ_2, in Worten: die Wirkung einer Distribution auf eine Linearkombination von Testfunktionen ist gleich der Linearkombination der Wirkungen auf die Testfunktionen;

- *die Abbildung u ist stetig auf dem Raum der Testfunktionen $C_0^\infty(G)$, d.h. falls eine Folge $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ im Sinne von Definition 2.2 gegen eine Testfunktion ϕ strebt, dann strebt die Folge der Wirkungen $\{u(\phi_k)\}_{k\geq 1}$ (das ist eine Folge von komplexen Zahlen) gegen die Wirkung $u(\phi)$.*

Wir bezeichnen die Menge der Distributionen mit $D'(G)$.

Die geforderten Eigenschaften von Distributionen rechtfertigen, diese als lineare stetige Funktionale auf dem $C_0^\infty(G)$ zu bezeichnen.

Beispiele. 1. Wir definieren die Nulldistribution $u : \phi \in C_0^\infty(G) \to u(\phi) = 0$.

2. Wir definieren die Diracsche δ_{x_0}-Distribution durch $\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0)$, wobei natürlich der Punkt x_0 zum Gebiet G gehören muß.

3. Vorgelegt sei eine Funktion $u = u(x)$ aus dem Raum $L^1_{loc}(G)$, d.h. für jede Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(G)$ gehört das Produkt $u\phi$ zum Funktionenraum $L^1(G)$. Dann wird diese Funktion mittels der Vorschrift $u(\phi) = \int_G u(x)\phi(x)dx$ mit einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(G)$ identifiziert.

   Überprüfen wir die Eigenschaften einer Distribution. Das Integral $u(\phi)$ existiert natürlich für jede Testfunktion und stellt damit eine komplexe Zahl dar.
   Nutzen wir die Linearität des Integrals, dann erhalten wir sofort die zweite Eigenschaft aus Definition 2.3.
   Es sei jetzt $\{\phi_m\}_m$ eine Folge aus $C_0^\infty(G)$, die im Sinne von Definition 2.2 gegen eine Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(G)$ konvergiert. Dann existiert kekanntlich eine kompakte Menge K, in welcher sämtliche Träger von ϕ_m und ϕ enthalten sind. Somit gilt

$$\begin{aligned} |u(\phi_m) - u(\phi)| &= \Big| \int_G (\phi_m(x) - \phi(x))u(x)dx \Big| = \Big| \int_K (\phi_m(x) - \phi(x))u(x)dx \Big| \\ &\leq p_{K,0}(\phi_m - \phi) \int_K |u(x)|dx \leq C_K p_{K,0}(\phi_m - \phi) \to 0 \text{ for } m \to \infty. \end{aligned}$$

   Damit strebt auch die Folge der Wirkungen $\{u(\phi_m)\}_m$ gegen $u(\phi)$.

Definition 2.4. *Es sei $u \in D'(G)$. Wird u durch eine lokal integrierbare Funktion $f = f(x)$ erzeugt, d.h. $u(\phi) = \int_G f(x)\phi(x)dx$ für alle $\phi \in C_0^\infty(G)$ (siehe Beispiel 3), dann heißt u reguläre Distribution. Andernfalls heißt u singuläre Distribution.*

Merke. Die Diracsche Distribution δ_{x_0} ist eine singuläre Distribution.

Wir haben einige Beispiele von Distributionen kennengelernt. Wir wollen noch weitere Beispiele von Distributionen kennenlernen, die bei der Modellierung technischer Sachverhalte auftreten.

Beispiele. 1. Wenden wir uns der Modellierung der Massendichte eines endlichen Systems von Punktmassen $m_1, m_2, \cdots, m_{N-1}, m_N$ in den Punkten $x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, x_N$ im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ zu. Als Verallgemeinerung der Modellierung aus Abschnitt 1 erhalten wir $\rho = \sum_{k=1}^N m_k \delta_{x_k}$. Die Definition der Wirkung auf Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ erfolgt durch

$$\rho(\phi) = \sum_{k=1}^N m_k \, \delta_{x_k}(\phi) = \sum_{k=1}^N m_k \, \phi(x_k).$$

2. Wir wenden uns der Modellierung einer einfachen Schicht auf einer beschränkten glatten Fläche S mit der Massebelegung $\mu = \mu(x, y, z)$, die stetig auf S verteilt ist, zu. Wir beschreiben die Massendichte durch heuristisches Vorgehen. Im Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in S$ liege die Punktmasse $\mu(x_0, y_0, z_0)$ vor. Wir erhalten als formale Verallgemeinerung der obigen Modellierung

$$\rho = \sum_{(x,y,z)\in S} \mu(x, y, z)\delta_{(x,y,z)}$$

mit der Wirkung

$$\rho(\phi) = \sum_{(x,y,z)\in S} \mu(x, y, z)\phi(x, y, z)$$

für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Die Summation erfolgt über eine überabzählbare Menge und kann damit mathematisch korrekt nur als Integration gedeutet werden. Somit erhalten wir für die gesuchte Wirkung

$$\rho(\phi) = \int_S \mu(x, y, z)\phi(x, y, z)d\sigma.$$

Distributionentheoretisch läßt sich $\int_S \mu(x, y, z)\phi(x, y, z)d\sigma$ durch $\mu\delta_S$ ausdrücken. *Die Distribution $\mu\delta_S$ heißt einfache Schicht auf S mit der stetigen Belegung $\mu = \mu(x, y, z)$. Im Symbol schreiben wir $\rho = \mu\delta_S$.*
Da S als glatt und μ als stetig auf S vorausgesetzt sind, existiert für jedes $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ das obige Integral. Der Integralwert ist gerade die Wirkung von $\mu\,\delta_S$ auf ϕ.

3. Wenden wir uns der Modellierung eines elektrischen Dipols zu. Wir betrachten im $\mathbb{R}^1$ zwei entgegengesetzte gleich große Ladungen $-Q$, $+Q$ in den Punkten $-\varepsilon$, $+\varepsilon$. Mit einem für $\varepsilon \to 0$ endlichem Dipolmoment μ erhält man $Q = \frac{\mu}{2\varepsilon}$. Die Ladungsdichte dieser beiden Punktladungen läßt sich in der Form $\rho_\varepsilon = \frac{\mu}{2\varepsilon}\,(\delta_\varepsilon - \delta_{-\varepsilon})$ darstellen. Die Wirkung auf eine beliebige Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ wird erklärt durch

$$\rho_\varepsilon(\phi) = \frac{\mu}{2\varepsilon}\,(\delta_\varepsilon(\phi) - \delta_{-\varepsilon}(\phi)) = \frac{\mu}{2\varepsilon}\,(\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)).$$

Für die Ladungsdichte des Dipols ($\varepsilon \to 0$) ergibt sich daraus

$$\rho(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu\left(\frac{\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)}{2\varepsilon}\right) = \mu(\phi'(0)).$$

Man zeigt mit den Regeln des nächsten Abschnittes, daß $\mu(\phi'(0)) = -\mu\,\delta_0'(\phi)$ gilt. *Damit wird der Dipol in $x = 0$ mit endlichem Dipolmoment μ in der Form $-\mu\delta_0'$ modelliert.*

4. Wenden wir uns schließlich der Modellierung einer doppelten Schicht auf einer beschränkten glatten Fläche S mit gegebenem stetigen Dipolmoment $\mu = \mu(x, y, z)$, $(x, y, z) \in S$ zu.

   Oberhalb der Fläche kleben positive Ladungen, unterhalb der Fläche kleben die dazu entgegengesetzt geladenen Ladungen. Wir betrachten wieder zuerst einen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Anstelle der Geraden aus dem vorigen Beispiel tritt jetzt die Gerade, deren Richtungsvektor gerade dem Normalenvektor an S im Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in S$ entspricht. Durch gleiches Vorgehen wie im letzten Beispiel ergibt sich für den einzelnen Dipol in (x_0, y_0, z_0) die Wirkung auf Testfunktionen in der Form

$$\mu(x_0, y_0, z_0)(\partial_n\,\phi(x_0, y_0, z_0)) \quad \text{für} \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Dabei bezeichnet $\partial_n \phi$ die Normalenableitung von ϕ. Durch gleiches heuristisches Vorgehen wie im Beispiel 2 erhalten wir als Wirkungen der gesuchten doppelten Schicht

$$\rho(\phi) = \int_S \mu(x,y,z)\partial_n \, \phi(x,y,z) d\sigma.$$

Distributionentheoretisch läßt sich das in der Form $\rho = -\partial_n(\mu \, \delta_S)$ ausdrücken. *Man nennt* $-\partial_n(\mu \, \delta_S)$ *doppelte Schicht auf* S *mit gegebenem stetigen Dipolmoment* $\mu = \mu(x,y,z)$.

3 Ausbau der Menge der Distributionen zu einer handhabbaren Struktur

3.1 Gleichheit von Distributionen

Zwei beliebige Distributionen $u, v \in D'(G)$ sind gleich, im Symbol $u = v$, wenn für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(G)$ die Wirkungen $u(\phi) = v(\phi)$ übereinstimmen.

3.2 Einschränkung einer Distribution

Gegeben sei eine Distribution $u \in D'(G)$. Weiterhin sei $G_1 \subset G$ ein beliebiges Teilgebiet von G. Dann bezeichnen wir die Abbildung $\phi \in C_0^\infty(G_1) \to u(\phi)$ als Einschränkung der Distribution $u \in D'(G)$ auf das Teilgebiet G_1 (es werden nur die Wirkungen von u für alle $\phi \in C_0^\infty(G_1)$ berücksichtigt).

3.3 Addition zweier Distributionen

Gegeben seien zwei Distributionen $u, v \in D'(G)$. Dann versteht man unter der Summe $u + v$ die Distribution mit $u + v : \phi \in C_0^\infty(G) \to (u+v)(\phi) := u(\phi) + v(\phi)$.

3.4 Multiplikation mit einer komplexen Zahl

Gegeben seien eine Distribution $u \in D'(G)$ und eine komplexe Zahl λ. Dann versteht man unter dem Produkt λu gerade die Distribution $\lambda u : \phi \in C_0^\infty(G) \to (\lambda \, u)(\phi) := \lambda \, u(\phi)$.

3.5 Multiplikation mit einer Funktion $a = a(x) \in C^\infty(G)$

Das Produkt einer Distribution $u \in D'(G)$ mit einer $C^\infty(G)$-Funktion $a = a(x)$ ist gerade die Distribution $a(x)u$, die durch die Vorschrift $a(x)u : \phi \in C_0^\infty(G) \to (a(x)u)(\phi) := u(a \, \phi)$ erklärt wird. Man beachte dabei, daß mit $\phi \in C_0^\infty(G)$ und $a \in C^\infty(G)$ auch das Produkt $a\phi$ eine Testfunktion, also ein Element aus $C_0^\infty(G)$ darstellt. Damit ist tatsächlich die Wirkung von u auf $a \, \phi$ definiert.

Aufgabe 3 Machen Sie sich deutlich warum man i.allg. Distributionen nicht mit stetigen Funktionen multiplizieren kann. Es gibt aber Distributionen, die mit stetigen Funktionen multipliziert werden können. Zeigen Sie, daß die Diracsche Distribution δ_{x_0} und die einfache Schicht solche Distributionen sind. Mit welchen Funktionen darf man den Dipol oder die doppelte Schicht multiplizieren?

3.6 Ableitung einer Distribution

Die Ableitung einer Distribution $u \in D'(G)$, man spricht auch von Distributionenableitung oder von verallgemeinerter Ableitung, $\partial_x^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$ ist gerade diejenige Distribution, die durch die Vorschrift

$$\partial_x^\alpha u : \phi \to (\partial_x^\alpha u)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial_x^\alpha \phi)$$

erklärt wird. Mit $\phi \in C_0^\infty(G)$ ist auch $\partial_x^\alpha \phi \in C_0^\infty(G)$ eine Testfunktion. Damit ist die Wirkung von u auf $\partial_x^\alpha \phi$ definiert.

Beispiele. 1. Vorgelegt sei die Funktion $u = u(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x & x > 0. \end{cases}$ Diese Funktion gehört zum Raum $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, sie ist sogar stetig, aber nicht differenzierbar in $x = 0$. Nach Definition 2.4 können wir diese Funktion als Distribution deuten mittels der Wirkungen

$$u(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\phi(x)dx = \int_0^\infty x\, \phi(x)dx$$

für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$. Die erste Ableitung ist definiert durch

$$u'(\phi) = -\int_0^\infty x\, \phi'(x)dx = -x\, \phi(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot \phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\phi(x)dx,$$

wobei $H = H(x)$ die Heaviside-Funktion $H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ ist. Nach der Gleichheit von Distributionen gilt $u' = H$.

2. Berechnen wir nun u''. Es gilt nach Definition

$$u''(\phi) = H'(\phi) = -\int_0^\infty 1 \cdot \phi'(x)dx = -\phi(x)\Big|_0^\infty = \phi(0).$$

Nach der Gleichheit von Distributionen gilt $u''(\phi) = \phi(0) = \delta_0(\phi)$, also $u'' = H' = \delta_0$. Für höhere Ableitungen erhalten wir

$$u^{(k)}(\phi) = \delta_0^{(k-2)}(\phi) = (-1)^{k-2}\delta_0(\phi^{(k-2)}) = (-1)^{k-2}\phi^{(k-2)}(0).$$

3. Wenden wir uns folgendem Beispiel zu. Es sei $u = u(x)$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall (a, b), d.h. es existieren Stellen $x_1, x_2, \cdots, x_k$ aus (a, b) so, daß u auf jedem Intervall $(a, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_k, b)$ stetig differenzierbar ist, aber an den Stellen $x_1, x_2, \cdots, x_k$ Sprungstellen der Höhe $s_j = u(x_j + 0) - u(x_j - 0),\ j = 1, \cdots, k$ besitzt.

Frage: Was ergibt sich als Distributionenableitung $d_x u$ von u?

Antwort: Die Wirkungen der gesuchten Distribution u' auf Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(a, b)$ ergeben sich durch

$$u'(\phi) = \int_a^b \{u'(x)\}\phi(x)dx + \sum_{j=1}^k s_j \delta_{x_j}(\phi) = \int_a^b \{u'(x)\}\phi(x)dx + \sum_{j=1}^k s_j \phi(x_j).$$

Dabei bezeichnet $\{u'(x)\}$ die Funktion, die entsteht, wenn wir die Ableitungen auf den Intervallen $(a, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_k, b)$ bilden und dann "zusammensetzen".

Bemerkungen. 1. Jede Distribution ist unendlich oft differenzierbar, d.h. jede Distributionenableitung $\partial_x^\alpha u$ existiert.

2. Es gibt Funktionen (siehe Beispiele), die im Distributionensinne differenzierbar sind, aber nicht im klassischen Sinne.

Nun haben wir die Distributionenableitung kennengelernt. Gegeben sei eine auf einem Intervall (a, b) stetig differenzierbare Funktion $u = u(x)$. Dann existiert die klassische Ableitung $u' = u'(x)$ als stetige Funktion auf (a, b). Nun erzeugen u und u' Distributionen. Der folgende Satz gibt eine Antwort darauf, daß man klassische Ableitung und Distributionenableitung in einem gewissen Sinne identifizieren kann.

Theorem 3.1. *Gegeben sei eine Distribution $u \in D'(G)$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß die partielle Ableitung $\partial_x^\alpha u = g_\alpha$ im klassischen Sinne existiert und stetig in G ist. Dann gilt $\partial_x^\alpha u(\phi) = \int_G g_\alpha(x)\phi(x)dx$ für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(G)$. Damit ergibt sich die Distributionenableitung $\partial_x^\alpha u$ gerade als die von der klassischen Ableitung $g_\alpha = \partial_x^\alpha u$ erzeugte Distribution. Im Sinne dieser Identifikation*

"$\partial_x^\alpha u(\phi)$ wird durch $g_\alpha = \partial_x^\alpha u$ erzeugt"

stimmen beide Ableitungen überein.

Aufgabe 4 Man bestimme die Menge aller Lösungen von $x^p u = 0$, $p \in \mathbb{N}$, in der Menge $D'(R)$.

3.7 Unbestimmtes Integral einer Distribution

Eine Distribution $f \in D'(G)$ heißt eine Stammfunktion zu einer vorgelegten Distribution $u \in D'(G)$ bezüglich der Variablen x_j falls im Distributionensinne gilt $\partial_{x_j} f = u$, d.h. $\partial_{x_j} f(\phi) = u(\phi)$ für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(G)$.

3.8 Weitere Beispiele

3.8.1 Radon-Maße

Ein komplexwertiges Maß μ auf der Borel-Algebra über G heißt Radon-Maß, falls für jedes Kompaktum $K \subset G$ das Maß $|\mu|(K) < \infty$ erfüllt. Dabei bezeichnet $|\mu| = \sqrt{|\Re\mu|^2 + |\Im\mu|^2}$. Die Menge der komplexwertigen Radon-Maße $M(G)$ wird mit der Familie von Seminormen $|\mu|(K)$ topologisiert. Entsprechend dem Vorgehen bei lokal integrierbaren Funktionen (vgl. mit Definition 2.4) kann man jedem Maß μ mittels

$$\mu : \phi \in C_0^\infty(G) \to \mu(\phi) = \int_G \phi(x)d\mu(x)$$

eine Distribution zuordnen. Hierbei nutzt man die Abschätzung

$$|\mu(\phi)| \leq \int_{\operatorname{supp}\phi} d|\mu|(x) \sup_G |\phi(x)|.$$

Merke. Nutzen wir den Fakt, daß für ein vorgelegtes $\mu \in M(G)$ gilt:

$$\int_G \phi(x)d\mu(x) = 0 \text{ für alle } \phi \in C_0^\infty(G) \text{ genau dann, wenn } \mu = 0,$$

dann erhalten wir die stetige Einbettung von $M(G)$ in $D'(G)$.

Beispiel. Wir betrachten das Diracsche Punktmaß δ_x für ein festes $x \in G$. Dann gilt $\delta_x(K) = 1$ für $x \in K$, andernfalls ergibt sich $\delta_x(K) = 0$. Somit erhalten wir $\delta_x(\phi) = \phi(x)$.

3.8.2 Hadamardscher Hauptwert

Die Funktion $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to 1/x$ ist natürlich nicht lokal integrierbar. Trotzdem kann man durch diese Funktion eine Distribution $u \in D'(\mathbb{R})$ erzeugen. Das geschieht mit Hilfe des Hadamardschen Hauptwertes und funktioniert wie folgt:

$$\text{p.v.}\frac{1}{x}(\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

Nutzen wir $\phi(x) = \phi(0) + \psi(x)x$ und $\phi \equiv 0$ außerhalb eines Intervalls $[-R(\phi), R(\phi)]$, dann ergibt sich sofort

$$\text{p.v.}\frac{1}{x}(\phi) = \int_{-R(\phi)}^{R(\phi)} \psi(x)dx, \text{ und daraus } \left|\text{p.v.}\frac{1}{x}(\phi)\right| \leq \text{meas}(\text{supp}\phi) \sup_{\mathbb{R}} |\phi'(x)|.$$

Man erkennt unschwer, daß in diesem Fall der Hadamardsche Hauptwert mit dem Cauchyschen Hauptwert übereinstimmt.

Aufgabe 5 Zeigen Sie im distributionellen Sinne $\text{p.v.}\frac{1}{x} = d_x \ln |x|$.

Der Hadamardsche Hauptwert kommt bei Polen höherer Ordnung zur Geltung. Wenden wir uns der Definition

$$\text{p.v.}\frac{1}{x^2}(\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x^2} dx$$

zu. Nach Anwendung der Taylorschen Formel erhalten wir $\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \psi(x)x^2$, also

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-R(\phi),R(\phi)]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-R(\phi),R(\phi)]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \Big(\frac{\phi(0)}{x^2} + \frac{\phi'(0)}{x}\Big) dx + \int_{-R(\phi)}^{R(\phi)} \psi(x)dx.$$

Der Grenzwert mit $\phi'(0)$ verschwindet wie oben. Der Term mit $\phi(0)$ verschwindet nicht. Damit muß dieser singuläre Anteil noch subtrahiert werden, um ein Verschwinden zu garantieren. Damit stimmt die obige Definition nicht und wir schlußfolgern die richtige Definition

$$\text{p.v.}\frac{1}{x^2}(\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_{[-R(\phi),R(\phi)]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x^2} dx - \frac{2\phi(0)}{\varepsilon} \Big) = \int_{[-R(\phi),R(\phi)]} \psi(x)dx.$$

Entsprechend erhalten wir die Abschätzung

$$\left|\text{p.v.}\frac{1}{x^2}(\phi)\right| \leq \text{meas}(\text{supp}\phi) \sup_{\mathbb{R}} |\phi''(x)|.$$

Aufgabe 6 Wie würden Sie $\text{p.v.}\frac{1}{x^k}$, $k \geq 3, k \in \mathbb{N}$ definieren?

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Bemerkung ab, daß man Distributionen i.allg. nicht miteinander multiplizieren kann. Legen wir die üblichen Rechenregeln zugrunde, d.h. die Multiplikation solle kommutativ und assoziativ sein, dann kann eine solche zwischen Distributionen nicht existieren. Dazu schlußfolgern wir wie folgt:

$$0 = 0\, p.v.\frac{1}{x} = (x\delta_0)\, p.v.\frac{1}{x} = (\delta_0 x)\, p.v.\frac{1}{x} = \delta_0 \left(x\, p.v.\frac{1}{x}\right) = \delta_0 \cdot 1 = \delta_0,$$

womit ein Widerspruch hergestellt ist.

3.9 Träger einer Distribution

Analog Definition 1.1 definieren wir den Träger einer vorgelegten Distribution $u \in D'(G)$:

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in G : u \neq 0 \text{ in einer Umgebung von } x\}}.$$

Damit können wir Distributionen mit kompaktem Träger definieren.

Definition 3.1. *Es sei $u \in D'(G)$. Dann besitzt u einen kompakten Träger in G, falls eine kompakte, von u abhängige, Menge K so existiert, daß in $G \setminus K$ die Einschränkung von u mit der Nulldistribution übereinstimmt. Mit $\mathcal{E}'(G)$ bezeichnen wir den Teilraum von $D'(G)$ aller Distributionen mit kompakten Träger in G.*

3.10 Topologie in $D'(G)$

3.10.1 Schwache Konvergenz in $D'(G)$

Definition 3.2. *Es sei $\{u_n\}_n$ eine Folge aus $D'(G)$. Dann strebt die Folge schwach gegen die Distribution $u \in D'(G)$, falls für jede Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(G)$ die Folge $\{u_n(\phi)\}_n$ der Wirkungen von u_n auf ϕ in $\mathbb{C}$ gegen $u(\phi)$ strebt.*

Merke. Die Definition 3.2 ist eine vernünftige Verallgemeinerung der schwachen Konvergenz, die Sie aus dem Kurs Funktionalanalysis kennen. Danach konvergiert eine Folge $\{u_n\}_n$ in $L^2(G)$ schwach gegen $u \in L^2(G)$ falls $\lim_{n\to\infty}(u_n, \phi) = (u, \phi)$ für alle “Testfunktionen” $\phi \in L^2(G)$ gilt. Da der Funktionenraum $C_0^\infty(G)$ dicht in $L^2(G)$, reicht es auch, die Wirkungen auf dem Raum $C_0^\infty(G)$ zu studieren.

Aus Definition 3.2 entsteht zwangläufig folgende Frage:

“Angenommen eine Folge $\{u_k\}_{k\in N}$ aus $D'(G)$ hat die Eigenschaft, daß für jedes $\phi \in C_0^\infty(G)$ die Zahlenfolge $\{u_k(\phi)\}_{k\in N}$ in $\mathbb{C}$ konvergiert. Stellt dann die Abbildung

$u : \phi \longrightarrow u(\phi) := \lim\limits_{k\to\infty} u_k(\phi)$ eine Distribution $u \in D'(G)$ dar?”

Theorem 3.2. *Unter den Voraussetzungen obiger Fragestellung stellt $u : \phi \in C_0^\infty(G) \to u(\phi) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(\phi)$ ein Element aus $D'(G)$ dar. Damit ist der Raum $D'(G)$ vollständig mit dem Konvergenzbegriff aus Definition 3.2 ausgestattet.*

Beispiel. Es sei $\{\varepsilon_k\}_{k\in N}$ eine Nullfolge positiver Zahlen. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 1.1 das Konvergenzverhalten $\rho_{\varepsilon_k} \longrightarrow \delta_0$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{\varepsilon_k}(\phi) = \phi(0)$ für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(G)$.

Aufgabe 7 Zeigen Sie: Falls $\{u_k\}_{k\in N} \to u$ im Sinne von Definition 3.2, dann strebt auch $\{\partial_x^\alpha u_k\} \to \partial_x^\alpha u$, und $\{a\, u_k\}_{k\in N} \to a\, u$ im Sinne von Definition 3.2 für jede $C^\infty(G)$-Funktion $a = a(x)$.

3.10.2 Starke Konvergenz in $D'(G)$

Wir interpretieren die Glieder einer vorgelegten Folge $\{u_n\}_n$ aus $D'(G)$ als Folge linearer Funktionale über der Raum $C_0^\infty(G)$. Erinnern wir uns an die starke Konvergenz einer Folge $\{u_n\}_n$ linearer Operatoten $L(B_1 \to B_2)$ eines Banachraums B_1 in einen Banachraum B_2. Es gilt bekanntlich

$$\|u_n\|_{L(B_1\to B_2)} = \sup_{\|x\|\le 1, x\in B_1} \|u_n(x)\|_{B_2},$$

und die starke Konvergenz wird mit Hilfe der Ausdrücke

$$\|u_n - u_m\|_{L(B_1 \to B_2)} = \sup_{\|x\| \leq 1, x \in B_1} \|u_n(x) - u_m(x)\|_{B_2}$$

definiert. Für die starke Konvergenz reicht also das Studium der Wirkungen von u_n und u_m auf der Einheitskugel des Banachraums B_1. Dabei nutzt man die Homogenitätseigenschaft, um die Wirkungen auf ganz B_1 zu verstehen.

Diese Idee greifen wir auf, um die starke Konvergenz in $D'(\mathbb{R})$ erklären zu können. Dazu müssen wir zuerst die Beschränktheit von Mengen im Raum der Testfunktionen $C_0^\infty(G)$ definieren. Wenden wir uns zuerst dem Raum $C^\infty(G)$ zu.

Definition 3.3. *Eine Menge $A \subset C^\infty(G)$ heißt beschränkt, falls für jedes K_n und M aus Definition 2.1 und für jede Seminorm $p_{K_n,M}$ der Ausdruck*

$$\sup_{\phi \in A} p_{K_n,M}(\phi) \leq C(K_n, M) < \infty$$

ausfällt.

Damit gelingt es uns, beschränkte Mengen in $C_0^\infty(G)$ zu charakterisieren.

Definition 3.4. *Eine Menge $A \subset C_0^\infty(G)$ heißt beschränkt, falls die Menge der Trägerbedingung aus Definition 2.2 genügt und falls eine kompakte Menge K so exisitert, daß die Ausdrücke*

$$\sup_{\phi \in A} p_{K,M}(\phi) \leq C(K, M) < \infty$$

ausfallen für alle $M \in \mathbb{N}$.

Schließlich führen wir die starke Konvergenz in $D'(G)$ ein.

Definition 3.5. *Vorgelegt sei eine Folge $u_n \in D'(G)$. Dann konvergiert diese stark gegen eine Distribution $u \in D'(G)$, falls die Folge auf allen beschränkten Teilmengen von $C_0^\infty(G)$ gleichmäßig gegen u konvergiert, d.h. zu vorgelegtem ε und vorgelegter beschränkter Menge $A \subset C_0^\infty(G)$ existiert ein $n_0(A, \varepsilon)$ so, daß*

$$\sup_{\phi \in A} |u_n(\phi) - u(\phi)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Frage: Welche Beziehung gibt es zwischen schwacher und starker Konvergenz?

Antwort: Im Moment geben wir uns mit folgendem Resultat zufrieden:

Theorem 3.3. *Im Raum $D'(G)$ stimmen schwache und starke Konvergenz überein.*

Wir werden in einem späteren Abschnitt funktionalanalytische Eigenschaften des Raumes $D'(G)$ untersuchen. Im Moment sind wir froh darüber, daß Konvergenzuntersuchungen immer auf die leicht verständliche schwache Konvergenz aus Definition 3.2 reduziert werden können.

4 Reihen von Distributionen

4.1 Das Lokalisationsprinzip

Wir wiederholen den Begriff der Einschränkung einer Distribution. Im $\mathbb{R}^1$ sei die Distribution $u(\phi) = \sum_{i=0}^{N} \delta_i(\phi) = \sum_{i=0}^{N} \phi(i)$ gegeben. Die Einschränkung von u auf $(-\infty, 0)$ ist die Nulldistribution, die Einschränkung von u auf $(-1, 1)$ ist δ_0. Warum?

Theorem 4.1. *(Lokalisationsprinzip)*
Gegeben sei ein Gebiet G und eine Überdeckung von G mit Hilfe offener Mengen G_j, d.h. jeder Punkt von G ist in mindestens einem Gebiet G_j enthalten und die Vereinigungsmenge $\cup_{j\in N} G_j$ ergibt gerade das Gebiet G. In jedem Gebiet G_j sei eine Distribution

$$u_j : \phi \in C_0^\infty(G_j) \longrightarrow u_j(\phi)$$

gegeben. Diese Distributionen sollen noch folgender Verträglichkeitsbedingung genügen.
"Falls $G_{j_1} \cap G_{j_2} \neq \emptyset$, dann stimmen die Einschränkungen von u_{j_1} und u_{j_2} auf $G_{j_1} \cap G_{j_2}$ überein."

Unter diesen Voraussetzungen gibt es genau ein $u \in D'(G)$, dessen Einschränkung auf jeder offenen Menge G_j mit der gegebenen Distribution u_j übereinstimmt.

Erläuterung zum Lokalisierungsprinzip
Das Lokalisationsprinzip beinhaltet die Tatsache, daß eine Distribution $u \in D'(G)$ durch Beschreibung ihrer lokalen Wirkung auf jeder offenen Menge G_j einer Überdeckung $\cup_{j\in N} G_j$ von G eindeutig bestimmt ist. Damit bestimmt das lokale Verhalten das globale und umgekehrt. Wir können also die Distributionen u_j zusammenkleben und erhalten u.

4.2 Reihen von Distributionen

Mit Hilfe von Definition 3.2 kann man die Konvergenz von Reihen in $D'(G)$ definieren.

Definition 4.1. *Eine Reihe $\sum_{j=1}^\infty u_j$ von Distributionen $u_j \in D'(G)$ heißt in $D'(G)$ konvergent, falls die Folge $\{S_k\}_{k\geq 1}$ der Partialsummen im Sinne von Definition 3.2 in $D'(G)$ konvergiert. Gilt also $\lim_{k\to\infty} S_k = u$, d.h. $\lim_{k\to\infty} S_k(\phi) = u(\phi)$ für alle $\phi \in C_0^\infty(G)$, so schreiben wir wie gewohnt $u = \sum_{j=1}^\infty u_j$.*

Theorem 4.2. *Aus $u = \sum_{j=1}^\infty u_j$ in $D'(G)$ ergibt sich sofort $\partial_x^\alpha u = \sum_{j=1}^\infty \partial_x^\alpha u_j$. Damit besitzen im Unterschied zu Reihen in der klassischen Analysis Reihen von Distributionen die bemerkenswerte Eigenschaft, daß die Operationen unendliche Summation und Differentiation beliebig vertauscht werden können. Es ist uns also stets gestattet, die Ableitung einer konvergenten Reihe von Distributionen durch gliedweise Differentiation zu berechnen.*

Aufgabe 8 Überlegen Sie welche der beiden folgenden Reihen konvergiert?

$$\sum_{j=1}^\infty \delta_j, \qquad \sum_{j=1}^\infty \delta_{\frac{1}{j}}.$$

Beispiele. 1. *Die Dichtefunktion der Poisson-Verteilung als distributionen-theoretische Ableitung ihrer Verteilungsfunktion.*

Gegeben sei die Poisson-Verteilung mit der Dichtefunktion

$$p = p(x) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} p(k) = \frac{a^k}{k!}\ \exp(-a) \ \text{ für } \ k \in \mathbb{N}_0, \quad a > 0, \\ p(x) = 0 \quad \text{für } \ x \notin \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Es gilt natürlich $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p(k) = 1$. Unsere bisherigen Erfahrungen lehren uns, daß die Dichte p in der Form

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\ \exp(-a)\delta_k \ \text{ mit den Wirkungen } \ p(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\ \exp(-a)\phi(k)$$

für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ dargestellt werden kann. Überzeugen Sie sich, daß $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\ \exp(-a)\delta_k$ tatsächlich konvergiert. Zur Dichtefunktion p gibt es eine eindeutig bestimmte Verteilungsfunktion $F(x) = \sum_{k<x}\ p(k)$. Damit erweist sich $F = F(x)$ als stückweise konstante Funktion. Es gilt

$$F(x) = \begin{cases} 0 \qquad \text{für } \ x \leq 0, \\ p(0) \text{ für } \ x \in (0,1], \\ p(0) + p(1) \text{ für } \ x \in (1,2], \\ \sum\limits_{k=0}^{N} p(k) \text{ für } \ x \in (N, N+1]. \end{cases}$$

Im distributionen-theoretischen Sinne gilt

$$F'(x) = p(x).$$

Beweis. Wir betrachten für $m \in \mathbb{N}_0$ die Einschränkungen von $F = F(x)$ auf die Intervalle $(m - \frac{1}{2}\ ,\ m + \frac{1}{2})$ und $(m, m+1)$.

a) Nach Theorem 4.1 verschwindet F' auf $(m, m+1)$ sowohl im klassischen, als auch im Distributionensinne. Für p eingeschränkt auf $(m, m+1)$ erhalten wir

$$p(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \exp(-a)\ \phi(k) = 0 \quad \text{für alle} \quad \phi \in C_0^\infty(m, m+1),$$

d.h. $p \equiv 0$ auf $(m, m+1)$.

Fazit: Es gilt $F' = p$ auf $(m, m+1)$.

b) Für die Einschränkung von F' auf $(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$ ergibt sich

$$F' = p(m)\delta_m = \frac{a^m}{m!}\ \exp(-a)\delta_m.$$

Das ist offensichtlich auch die Einschränkung von p auf $(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$, da $p(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \exp(-a)\ \phi(k) = \frac{a^m}{m!}\ \exp(-a)\ \phi(m)$ für alle $\phi \in C_0^\infty(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$ gleich $p(m)\delta_m$.

Fazit: Es gilt $F' = p$ auf $(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$.

c) Für die Einschränkung von F' und p auf $(-\infty, 0)$ erhalten wir $F' = p = 0$.

Fazit: Es gilt $F' = p$ auf $(-\infty, 0)$.

Es bilden die Intervalle $(-\infty, 0) \cup_{m\in N_0} (m, m+1) \cup_{m\in N_0} (m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$ eine Überdeckung des $\mathbb{R}^1$.
Es sind alle Voraussetzungen der Anwendung des Lokalisationsprinzips erfüllt (Überprüfen Sie diese!). Nach Anwendung des Lokalisationsprinzips gilt $F' = p$, d.h. $F'(\phi) = p(\phi)$ für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$. □

2. *Modellierung eines Abtastsystems*

Bei Abtastsystemen, die in der Regelungstechnik oder in der Systemanalyse verwendet werden, treten diskontinuierliche Signale $u^*(t)$ auf, die aus einem kontinuierlichen Signal $u(t)$ durch Zwischenschaltung eines Abtastgliedes entstehen. Die Abtastung soll in gleichen Zeitabständen mit der Abtastperiode T_a erfolgen. Zu den Zeitpunkten kT_a, $k \in \mathbb{N}$, wird das Signal $u(kT_a)$ erfasst.

Aufgabe 9 Unser Ziel besteht in der distributionen-theoretischen Beschreibung von $u^*(t)$. Zeigen Sie, daß

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_a)\delta_{kT_a}$$

erfüllt ist.

5 Periodische Distributionen im $\mathbb{R}^1$

In der klassischen Analysis ist die Theorie der Fourierreihen eine wichtige Anwendung der Theorie von Funktionenreihen und wird eingesetzt zur Beschreibung von periodischen Prozessen. Wir werden jetzt den Begriff der periodischen Distribution einführen. Wir werden dann zeigen, daß jede periodische Distribution mittels einer in $D'(\mathbb{R})$ konvergenten Fourierreihe darstellbar ist.

5.1 Definition und Eigenschaften

Definition 5.1. *Eine komplexwertige Funktion f, die auf der reellen Achse definiert ist, heißt l-periodisch mit $l \in \mathbb{R}$ und $l > 0$, falls $f(x - l) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die l-periodisch sind, bezeichnen wir mit $C_{(l)}^\infty(\mathbb{R})$.*

Der Raum $C_{(l)}^\infty(\mathbb{R})$ ist ein Unterraum des $C^\infty(\mathbb{R})$, d.h. jede bez. der Topologie des $C^\infty(\mathbb{R})$ konvergente Folge l-periodischer Funktionen besitzt eine l-periodische Grenzfunktion.

Definition 5.2. *Eine Distribution $u \in D'(\mathbb{R})$ heißt l-periodisch, falls für die Wirkungen $u(\phi(x)) = u(\phi(x + l))$ für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ erfüllt ist. Die Menge aller Distributionen $u \in D'(\mathbb{R})$, die l-periodisch sind, bezeichnen wir mit $D'_{(l)}(\mathbb{R})$.*

Aufgabe 10 Zeigen Sie, daß der Raum $D'_{(l)}(\mathbb{R})$ mit der schwachen Konvergenz des $D'(\mathbb{R})$ ein Unterraum des $D'(\mathbb{R})$ ist.

Frage: Vereinbaren sich die Begriffe l-periodische Funktion und l- periodische Distribution.

Antwort: Ja! Es sei $u = u(x)$ eine l-periodische Funktion. Dann können wir u mittels

$$u(\phi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x-l)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\phi(x+l)dx$$

als Distribution deuten. Damit gilt für jede l-periodische Funktion u, die über eine Periode integrierbar ist, die Beziehung $u(\phi(x)) = u(\phi(x + l))$ für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Somit erzeugt u eine l-periodische Distribution.

5.2 Theorie der Fourierreihen

In diesem Abschnitt wollen wir verstehen, daß jede periodische Distribution in eine in $D'(\mathbb{R})$ konvergente Fourierreihe entwickelt werden kann. Aus dem Grundkurs Analysis kennen wir folgendes Resultat:

"Jede stückweise stetig differenzierbare l-periodische Funktion $u = u(x)$ wird durch ihre Fourierreihe in der Form

$$\frac{1}{2}\Big(u(x-0)+u(x+0)\Big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{l}kx}$$

dargestellt. Die Fourierkoeffizienten c_k berechnen sich durch

$$c_k = \frac{1}{l}\int_0^l u(x)e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}dx.$$

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß im Distributionensinne

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{l}kx}$$

erfüllt ist."

Die erste Frage ist die nach der Berechnung der Fourierkoeffizienten. Es sollte uns dabei sofort die Möglichkeit

$$c_k = u\Big(e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}\Big)$$

einfallen. Bisher kennen wir aber nur die Wirkungen von u auf Testfunktionen, natürlich ist $e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}$ keine Testfunktion.

Die folgenden Zusatzüberlegungen zeigen, wie man Wirkungen von l-periodischen Distributionen $u \in D'_{(l)}(\mathbb{R})$ auf Produkte von l-periodischen Funktionen f mit einer geeigneten Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ definieren kann.

Definition 5.3. *Eine Funktion $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ heißt unitär, falls mit einem positiven l gilt $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a(x-kl) = 1$. In diesem Sinn zerlegen wir die Funktion $\equiv 1$.*

Beispiel. Wir wählen eine Funktion $b \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $b(x) \in [0,1]$ und $b(x) = 0$ für $x \le 0$ und $b(x) = 1$ für $x \ge l$. Dann definieren wir $a(x) = b(x)(1-b(x-l))$. Diese Funktion a gehört zum Raum $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Für $x \in [-l, 0]$ reduziert sich die Reihe aus Definition 5.3 auf

$$\begin{aligned} a(x+2l) + a(x+l) &= b(x+2l)(1-b(x+l)) + b(x+l)(1-b(x)) \\ &= 1 - b(x+l) + b(x+l) = 1. \end{aligned}$$

Aus der l-Periodizität der Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a(x-kl)$ folgt die Zerlegung der Funktion $\equiv 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Definition 5.4. *Es sei a eine unitäre Funktion. Für gegebenes $f \in C_{(l)}^\infty(\mathbb{R})$ und $u \in D'_{(l)}(\mathbb{R})$ wird durch $f \to u(af)$ eine Abbildung von $C_{(l)}^\infty(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{C}$ definiert.*

Definition 5.5. *Es sei $u \in D'_{(l)}(\mathbb{R})$ vorgelegt. Dann heißen die Zahlen $c_k := \frac{1}{l}u\Big(a(x)e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}\Big)$ Fourierkoeffizienten von $u \in D'_{(l)}(\mathbb{R})$. Dabei ist $a = a(x)$ eine beliebige unitäre Funktion. Die Fourierkoeffizienten sind von der Wahl von a unabhängig.*

Merke. Nach Definition 5.3 sind die Ausdrücke $u\Big(a(x)e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}\Big)$ sinnvoll, da die Funktionen $e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}$ zum Raum $C^\infty_{(l)}(\mathbb{R})$ gehören.

Theorem 5.1. *Die in Definition 5.5 eingeführte distributionentheoretische Definition der Fourierkoeffizienten stimmt mit der klassischen Definition überein.*

Beweis. Vorgelegt sei eine l-periodische, über eine Periode integrierbare Funktion u. Dann gilt mit einem beliebigen unitären a

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{l}\int_0^l u(x)e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}dx = \frac{1}{l}\int_0^l u(x)e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a(x+jl)dx \\ &= \frac{1}{l}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^l u(x)a(x+jl)e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}dx. \end{aligned}$$

Dabei wurde die gleichmäßige Konvergenz der Reihe ausgenutzt. Verwenden wir nun noch die l-Periodizität, dann folgt

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{l}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^l u(x+jl)a(x+jl)e^{-i\frac{2\pi}{l}k(x+jl)}dx = \frac{1}{l}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{jl}^{(j+1)l} u(x)a(x)e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}dx \\ &= \frac{1}{l}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)a(x)e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}dx = \frac{1}{l}u\Big(a(x)e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}\Big). \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis erbracht. □

Wir formulieren jetzt ohne Beweis die folgenden beiden Hauptsätze der Beziehung zwischen periodischen Distributionen und Fourierreihen.

Theorem 5.2. *(Konvergenzsatz für Fourierreihen) Es sei $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Zahlenfolge aus $\mathbb{C}$ mit Potenzverhalten, d.h. es gibt eine positive Konstante C und ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $|b_k| \leq C|k|^p$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{i\frac{2\pi}{l}kx}$ in $D'(\mathbb{R})$ und definiert dort eine l-periodische Distribution $u \in D'_{(l)}(\mathbb{R})$. Ihre Wirkungen auf Testfunktionen werden beschrieben durch*

$$u(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{l}kx}\phi(x)dx.$$

Die Fourierkoeffizienten werden definiert durch

$$b_k = \frac{1}{l}u\Big(a(x)e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}\Big)$$

mit einer beliebigen unitären Funktion $a = a(x)$.

Theorem 5.3. *(Entwicklungssatz in Fouriereihen) Es sei $u \in D'_{(l)}(\mathbb{R})$. Dann haben die Fourierkoeffizienten von u Potenzverhalten und die Distribution u wird durch ihre Fourierreihe dargestellt.*

Beispiel. Wir wollen als Beispiel die Sägezahnkurve untersuchen. Die Sägezahnkurve besitzt die Fourierreihendarstellung

$$2\,a\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{\sin(kx)}{k}\ \sim f(x)\ \text{ mit }\ f(x)=\begin{cases} a\,x \quad \text{für} \quad -\pi\le x<\pi \\ \text{und}\ 2\pi-\text{periodischer Fortsetzung}\end{cases},\ a>0.$$

Die Übereinstimmung mit der Fourierreihe gilt nicht an den Sprungstellen $x=\pi+2j\pi\ ,\ j\in\mathbb{Z}$. Deshalb verwenden wir das Zeichen $\sim$. Deuten wir aber f bzw. $2a\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}$ als Distribution bzw. Reihe von Distributionen, dann gilt

$$f=2\,a\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}$$

im Sinne der Gleichheit von Distributionen. Für die erste Ableitung erhalten wir einerseits durch Bildung der 1.Ableitung von f im distributionellen Sinne

$$f'(x)=a-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\ 2a\pi\ \delta_{(x-\pi-2k\pi)}$$

und andererseits durch formale Differentiation der Fouriereihe im distributionellen Sinne

$$f'(x)=2a\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cos(kx),$$

das geschieht durch gliedweise Differentiation der Reihe. Nutzen wir schließlich $\cos(kx)=\frac{1}{2}\ (e^{ikx}+e^{-ikx})$, dann ergibt sich

$$a-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\ 2a\pi\ \delta_{(x-\pi-2k\pi)}=a\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}(e^{ikx}+e^{-ikx}),$$

bzw.

$$2a\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\ \delta_{(x-\pi-2k\pi)}=a\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k}\ e^{ikx}.$$

Damit erhalten wir die bemerkenswerte Beziehung

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\ \delta_{(x-\pi-2k\pi)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k}\ e^{ikx}.$$

Reihendarstellungen für höhere Ableitungen von f ergeben sich jeweils durch gliedweise Differentiation.

6 Faltungen von Distributionen

6.1 Tensorprodukte

Wir betrachten ein Gebiet $G\subset\mathbb{R}^{2n}$ der speziellen Struktur $G:=G_1\times G_2$ mit $G_1,\,G_2\subset\mathbb{R}^n$. Dann lassen sich zu Funktionen $\phi_1\in C^\infty(G_1)$ und $\phi_2\in C^\infty(G_2)$ mittels der Vorschrift

$$\phi_1\otimes\phi_2:(x,y)\in G_1\times G_2\to\phi_1(x)\phi_2(y)$$

Funktionen aus $C^\infty(G_1 \times G_2)$ zuordnen. Diese Abbildung bezeichnet man als Tensorprodukt. Dieses hat folgende Abbildungseigenschaften:

- $C^\infty(G_1) \times C^\infty(G_2) \to C^\infty(G_1 \times G_2)$,
- $C_0^\infty(G_1) \times C_0^\infty(G_2) \to C_0^\infty(G_1 \times G_2)$,
- $L^1_{loc}(G_1) \times L^1_{loc}(G_2) \to L^1_{loc}(G_1 \times G_2)$.

Aufgabe 11 Untersuchen Sie, ob alle diese Abbildungen stetig sind. Was haben Sie dafür zu zeigen?

Merke. Es ist

$$\operatorname{span}\{\phi_1 \otimes \phi_2 : \phi_1 \in C_0^\infty(G_1),\, \phi_2 \in C_0^\infty(G_2)\} \to C_0^\infty(G_1 \times G_2)$$

eine dichte Einbettung. Dafür schreiben wir $C_0^\infty(G_1 \times G_2) = C_0^\infty(G_1)\hat{\otimes}C_0^\infty(G_2)$.

Zur Vorbereitung des Tensorproduktes zwischen zwei Distributionen betrachten wir die durch das oben eingeführte Tensorprodukt $\phi_1 \otimes \phi_2$ erzeugte Distribution. Diese genügt der Vorschrift

$$(\phi_1 \otimes \phi_2)(f) = \int_{G_1 \times G_2} \phi_1(x)\phi_2(y)f(x,y)d(x,y) \text{ für alle } f \in C_0^\infty(G_1 \times G_2),$$

bzw. nach Verwendung iterierter Integrale

$$(\phi_1 \otimes \phi_2)(f) = \int_{G_1} \phi_1(x)\Big(\int_{G_2} \phi_2(y)f(x,y)dy\Big)dx = \int_{G_2} \phi_2(y)\Big(\int_{G_1} \phi_1(x)f(x,y)dx\Big)dy.$$

Beachten wir jetzt, daß

$$\int_{G_1} \phi_1(x)f(x,y)dx \in C_0^\infty(G_2) \text{ und } \int_{G_2} \phi_2(y)f(x,y)dy \in C_0^\infty(G_1),$$

dann erhalten wir sofort

$$(\phi_1 \otimes \phi_2)(f) = \phi_1(\phi_2(f)) = \phi_2(\phi_1(f)).$$

Als Verallgemeinerung dieser Überlegungen erhalten wir folgende Definition.

Definition 6.1. *Seien $u_1 \in D'(G_1)$ und $u_2 \in D'(G_2)$. Dann ist $u_1 \otimes u_2$ gerade die Distribution aus $D'(G_1 \times G_2)$, die wie folgt definiert ist:*

$$u_1 \otimes u_2 : \phi \in C_0^\infty(G_1 \times G_2) \to u_1(u_2(\phi)) = u_2(u_1(\phi)) \in \mathbb{C}.$$

Es gilt $D'(G_1 \times G_2) = D'(G_1)\hat{\otimes}D'(G_2)$.

6.2 Faltungen

Gegeben seien zwei Testfunktionen $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert man durch

$$\phi_1 * \phi_2 : x \in \mathbb{R}^n \to \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(y)\phi_2(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_2(y)\phi_1(x-y)dy$$

die Faltung $\phi_1 * \phi_2$ der beiden Testfunktionen ϕ_1, ϕ_2.

Frage: Welche Eigenschaften hat $\phi_1 * \phi_2$?

Antwort: Die Funktion $\phi_1 * \phi_2$ hat folgende Eigenschaften:

- $\phi_1 * \phi_2$ besitzt einen kompakten Träger,
- $\partial_x^\alpha(\phi_1 * \phi_2) = \partial_x^\alpha \phi_1 * \phi_2 = \phi_1 * \partial_x^\alpha \phi_2$,
- $\phi_1 * \phi_2 = \phi_2 * \phi_1$,
- $(\phi_1 * \phi_2) * \phi_3 = \phi_1 * (\phi_2 * \phi_3)$,
- $\phi_1 * \phi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Die letzte Eigenschaft gestattet, $\phi_1 * \phi_2$ mit einer Distribution zu identifizieren. Es gilt

$$\phi_1 * \phi_2 : f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(y)\phi_2(x-y)dy \Big) f(x)dx.$$

Nach einer Variablensubstitution ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \phi_1 * \phi_2 : f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to & \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(y) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \phi_2(x) f(x+y) dx \Big) dy \\ = & \int_{\mathbb{R}^{2n}} \phi_1(y)\phi_2(x) f(x+y) d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (\phi_1 \otimes \phi_2)(x,y) f(x+y) d(x,y). \end{aligned}$$

Bemerkungen. Es ist klar, daß in obigen Überlegungen nicht einfach ϕ_1 und ϕ_2 aus dem Raum $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gewählt werden dürfen, da das klassische Faltungsintegral nicht notwendig existiert. Die Funktionen ϕ_1 und ϕ_2 erzeugen aber Distributionen aus $D'(\mathbb{R}^n)$. Demgegenüber dürfen wir aber ϕ_1 aus dem Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und ϕ_2 aus dem $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wählen oder umgekehrt. Dabei verliert man natürlich die Eigenschaft des kompakten Trägers. Damit sollten wir uns erst einmal darüber Gedanken machen, wann überhaupt zwei Distributionen aus $D'(\mathbb{R}^n)$ miteinander gefaltet werden dürfen.

Definition 6.2. *Vorgelegt seien zwei Distributionen u_1 und u_2 aus $D'(\mathbb{R}^n)$. Die Distributionen u_1 und u_2 heißen faltbar miteinander, falls*

$$supp(u_1 \otimes u_2) \cap \tilde{K} \;\; \textit{kompakt sind}$$

für alle kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$ und mit $\tilde{K} = \{(x,y) : x+y \in K\}$.

Aufgabe 12 Zeigen Sie, daß u_1 faltbar mit u_2 ist, falls $u_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $u_2 \in D'(\mathbb{R}^n)$ sind, d.h. u_1 ist eine Distribution mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^n$.

Definition 6.3. *Sind u_1 und u_2 aus $D'(\mathbb{R}^n)$ faltbar miteinander, dann ist die Faltung $u_1 * u_2$ gerade die Distribution aus $D'(\mathbb{R}^n)$, die wie folgt definiert ist:*

$$u_1 * u_2 : \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to (u_1 \otimes u_2)(\phi(x+y)) = u_1(u_2(\phi(x+y))).$$

Mit dieser neuen Begriffsbildung können wir die Faltung zwischen einer Distribution $u_1 \in D'(\mathbb{R}^n)$ und einer Distribution mit kompakten Träger $u_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ definieren. Dabei ist für Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik die Restriktion $u_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ nicht einschränkend. Quellen und Senken irgendwelcher Erscheinungen (Ladungen, Massen, einfache und doppelte Schichten) besitzen erfahrungsgemäß kompakten Träger.

Frage: Welche Eigenschaften hat die Faltung?

Antwort: Die Faltung hat die folgenden Eigenschaften:

- $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$,
- δ_0 ist das Einselement der Faltung, d.h. $\delta_0 * u = u * \delta_0 = u$ für alle $u \in D'(\mathbb{R}^n)$,
- $\partial_x^\alpha(u_1 * u_2) = \partial_x^\alpha u_1 * u_2 = u_1 * \partial_x^\alpha u_2$,
- $u_1 * u_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, falls $u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $u_2 \in D'(\mathbb{R}^n)$.

Beachte. Die Faltung ist kommutativ, sie ist aber nicht assoziativ wie folgendes Beispiel zeigt: In $D'(\mathbb{R})$ gilt

$$(1 * \delta_0') * H = 0, \quad 1 * (\delta_0' * H) = 1, \ \ H \text{ ist die Heaviside Funktion.}$$

Aufgabe 13 Untersuchen Sie auf Faltbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die folgenden Faltungen:

- $1 * \mu$, wobei $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ ein Radon-Maß ist,
- $H * H$, $H * H * H$ usw.,
- $p.v.\frac{1}{x} * p.v.\frac{1}{x}$.

6.3 Schwartzscher Kernsatz

In diesem Abschnitt wollen wir Abbildungen $T : \phi \in C_0^\infty(G_1) \to T(\phi) \in D'(G_2)$ untersuchen, wobei $G_1 \in \mathbb{R}^n$ und $G_2 \in \mathbb{R}^m$ vorgegebene Gebiete sind. Zu einer derartigen Abbildung T läßt sich eine eindeutig bestimmte Distribution A auf $G_1 \times G_2$ mittels folgender Beziehung zuordnen:

$$A(\phi_1 \otimes \phi_2) = T(\phi_1)(\phi_2) \ \text{ für alle } \phi_1 \in C_0^\infty(G_1), \ \phi_2 \in C_0^\infty(G_2).$$

Ist diese Beziehung sinnvoll? Nach Voraussetzung ist die rechte Seite sinnvoll, damit ist A für alle $\phi_1 \otimes \phi_2$ definiert. Da nun $C_0^\infty(G_1) \otimes C_0^\infty(G_2)$ dicht in $C_0^\infty(G_1 \times G_2)$ liegt, ist nach einer Verallgemeinerung des bekannten Hahn-Banach Theorems die Distribution A eindeutig fortsetzbar auf $C_0^\infty(G_1 \times G_2)$. Umgekehrt definiert obige Beziehung für jedes $A \in D'(G_1 \times G_2)$ einen Operator $T : \phi \in C_0^\infty(G_1) \to T(\phi) \in D'(G_2)$. Damit haben wir schon die Aussage des Schwartzschen Kernsatzes erklärt.

Theorem 6.1. *Jedem beschränkten Operator $T : \phi \in C_0^\infty(G_1) \to T(\phi) \in D'(G_2)$ ist durch*

$$A(\phi_1 \otimes \phi_2) = T(\phi_1)(\phi_2), \ \textit{für alle } \phi_1 \in C_0^\infty(G_1), \ \phi_2 \in C_0^\infty(G_2),$$

umkehrbar eindeutig eine Distribution $A \in D'(G_1 \times G_2)$ zugeordnet. Diese Distribution heißt Schwartz-Kern.

Natürlich scheint im ersten Moment die Bezeichnung Schwartz-Kern aus der Luft gegriffen. Wählen wir zur Erklärung ein leicht verständliches Beispiel.

Beispiel. Es sei eine Kernfunktion $A = A(x, y) \in L^1_{loc}(G_1 \times G_2)$ vorgegeben. Dann wird mittels dieser ein Integraloperator $T = T(\phi_1) = \int_{G_1} A(x, y)\phi_1(x)dx$ definiert, wobei natürlich $\phi_1 \in C_0^\infty(G_1)$ frei wählbar ist. Das resultierende Bild liegt im Raum $L^1_{loc}(G_2)$. Somit gilt für alle $\phi_2 \in C_0^\infty(G_2)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} T(\phi_1)(\phi_2) &= \int_{G_2} \Big(\int_{G_1} A(x, y)\phi_1(x)dx \Big) \phi_2(y)dy \\ &= \int_{G_2} \int_{G_1} A(x, y)\phi_1(x)\phi_2(y)dxdy = A(x, y)(\phi_1(x) \otimes \phi_2(y)). \end{aligned}$$

Damit wird T auf eindeutige Weise die Distribution A bzw. die Kernfunktion A zugeordnet.

Wir wollen am Ende dieses Abschnittes noch einen neuen Begriff kennenlernen.

Definition 6.4. *Der Punkt $x \in G$ gehört nicht zum singulären Träger der Distribution $u \in D'(G)$, falls die Einschränkung von u auf eine Umgebung $U(x)$ von x zum Raum $C^\infty(U(x))$ gehört, d.h. $u\Big|_{U(x)} \in C^\infty(U(x))$. Der singuläre Träger von $u \in D'(G)$ wird mit singsupp u bezeichnet.*

Nach einer solchen Definition ist man an Eigenschaften des singulären Trägers interessiert. Aus Definition 6.4 ergibt sich sofort die Abgeschlossenheit des singulären Trägers.

Aufgabe 14 Wählen Sie Beispiele von Distributionen $u \in D'(G)$ und bestimmen Sie den singulären Träger.

Aufgabe 15 Wie verhält sich der singuläre Träger einer Distribution $u \in D'(G)$ bei Differentiation oder bei Multiplikation mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion?

7 Distributionenlösungen partieller Differentialgleichungen

Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung der Form

$$P(x, \partial_x)u = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha u = f$$

mit in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ unendlich oft differenzierbare Koeffizientenfunktionen $a_\alpha \in C^\infty(G)$. Die Quelle f gehöre zu $D'(G)$.

Definition 7.1. *Eine Distribution $u \in D'(G)$ heißt Distributionenlösung von $P(x, \partial_x)u = f$, falls die Distributionen $P(x, \partial_x)u$ und f übereinstimmen. Nach der Definition der Gleichheit zweier Distributionen bedeutet das*

$$P(x, \partial_x)u(\phi) = f(\phi)$$

für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(G)$.

Beachte. Wenden wir die Rechenregeln für Distributionen aus Kapitel 3 an, dann lassen sich die Wirkungen von $P(x, \partial_x)u$ auf Testfunktionen ϕ in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} P(x, \partial_x)u(\phi) &= \sum_{|\alpha| \le m} \partial_x^\alpha u(a_\alpha \phi), \text{ hier benötigen wir } \quad a_\alpha \in C^\infty(G) \\ &= \sum_{|\alpha| \le m} u((-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha (a_\alpha \phi)). \end{aligned}$$

Den linearen Differentialoperator $P(x, \partial_x)^*$ mit

$$P(x, \partial_x)^* \phi = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha (a_\alpha(x) \phi)$$

bezeichnet man als den zu $P(x, \partial_x)$ adjungierten oder dualen Operator. Nach Definition 7.1 ist $u \in D'(G)$ genau dann eine Distributionenlösung von $P(x, \partial_x)u = f$, falls

$$u(P^*(x, \partial_x)\phi) = f(\phi)$$

für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(G)$ gilt.

Beispiel. Vorgelegt sei der Differentialoperator $P(x, \partial_x) = \triangle$. Dann gilt $P^*(x, \partial_x) = \triangle$. Damit ist u eine Distributionenlösung von $\triangle u = f$, falls $u(\triangle\phi) = f(\phi)$ für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt. Dabei setzen wir $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ voraus.

Der Begriff der Distributionenlösung einer Differentialgleichung $P(x, \partial_x)u = f$ *ist eine echte Verallgemeinerung des Begriffs der klassischen Lösung von* $P(x, \partial_x)u = f$.

Theorem 7.1. *Verträglichkeit zwischen klassischer Lösung und Distributionenlösung einer partiellen Differentialgleichung*

Vorgelegt sei die partielle Differentialgleichung

$$P(x, \partial_x)u = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha u = f$$

mit unendlich oft differenzierbaren Koeffizientenfunktionen $a_\alpha \in C^\infty(G)$ *und* $f \in D'(G)$. *Falls* $f \in C(G)$ *und eine Distributionenlösung* $u \in D'(G)$ *von* $P(x, \partial_x)u = f$ *sogar zum* $C^m(G)$ *gehört, dann ist* u *sogar eine klassische Lösung von* $P(x, \partial_x)u = f$.

Beweis. Es sei $P(x, \partial_x)u(\phi) = f(\phi)$ für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(G)$ erfüllt. Nach Voraussetzung gehört $w := Pu - f$ zum Raum $C(G)$. Damit erzeugt w eine reguläre Distribution. Es gilt also $w(\phi) = \int_G w(x)\phi(x)dx = 0$ für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(G)$. Damit muß aber $w \equiv 0$ auf G sein, das liefert aber sofort $Pu = f$ in G. Andernfalls existiert wegen der Stetigkeit von w auf G ein Punkt $x_0 \in G$ und eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ so, daß $w(x) > 0$ oder $w(x) < 0$ in $U_\varepsilon(x_0)$ gilt. Wählen wir eine geeignete nichtnegative Testfunktion $\phi_0 \in C_0^\infty(U_\varepsilon(x_0))$ so, daß $\phi_0(x_0) > 0$, so erhalten wir sofort $w(\phi_0) > 0$ oder $w(\phi_0) < 0$ in Abhängigkeit vom Verhalten von w in $U_\varepsilon(x_0)$. □

7.1 Fundamentallösungen und ihre Bedeutung

Fundamentallösungen oder auch Elementarpotentiale genannt sind spezielle Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen mit der Quelle δ_0.

Definition 7.2. *Gegeben sei ein linearer Differentialoperator* $P(\partial_x) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial_x^\alpha$ *mit konstanten Koeffizienten* $a_\alpha \in \mathbb{C}$. *Als Fundamentallösung bezeichnet man jede Distribution* $H \in D'(\mathbb{R}^n)$, *die eine Distributionenlösung von* $P(\partial_x)H = \delta_0$ *darstellt, d.h.* $H(P^*(\partial_x)\phi) = \delta_0(\phi) = \phi(0)$ *für alle Testfunktionen* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. Die Menge aller Fundamentallösungen von $P(\partial_x)$ ergibt sich durch $H + H_0$, wobei H eine spezielle Fundamentallösung von $P(\partial_x)$ ist ($P(\partial_x)H = \delta_0$) und H_0 die allgemeine Lösung von $P(\partial_x)u = 0$ ist.
2. Nach einem Resultat von Malgrange (1958) besitzt jeder lineare Differentialoperator mit konstanten komplexen Koeffizienten eine Fundamentallösung $H \in D'(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 16 Welche Regularität besitzt eine Fundamentallösung von $LH = \delta_0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, falls L ein elliptischer Operator mit konstanten Koeffizienten ist?

Eine Fundamentallösung hat eine sehr große Bedeutung für die Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $P(\partial_x)u = f$.

Theorem 7.2. *Es sei* $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *eine gegebene Distribution mit kompaktem Träger* $K \subset \mathbb{R}^n$. *Dann ergibt sich eine Lösung von* $P(\partial_x)u = f$ *in der Form* $u = H * f$, *wobei* $H \in D'(\mathbb{R}^n)$ *eine Fundamentallösung des Differentialoperators* $P(\partial_x)$ *ist.*

Beweis. Mit den Rechenregeln für die Faltung gilt $P(\partial_x)(H * f) = P(\partial_x)H * f = \delta_0 * f = f$, wobei wegen $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $H \in D'(\mathbb{R}^n)$ die Faltung $H * f \in D'(\mathbb{R}^n)$ existiert. $\square$

Frage: Wie können wir uns die Formel aus Theorem 7.2 erklären?

Antwort: Wir stellen formal die Quelle $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger K in der Form $f_x = \sum_{\xi \in K} f(\xi)\delta_{(x-\xi)}$ dar. Die Punktquelle $f(\xi)\delta_{(x-\xi)}$ erzeugt das sogenannte Elementarpotential $f(\xi)H_{(x-\xi)}$. Dann ergibt sich formal das Gesamtpotential $u = \sum_{\xi \in K} f(\xi)H_{(x-\xi)}$ als Superposition der Elementarpotentiale. Mathematisch exakt bedeutet $\sum_{\xi \in K} f(\xi)H_{(x-\xi)}$ gerade $f * H = H * f$.

Beispiele. 1. Vorgelegt sei ein gewöhnlicher Differentialoperator, dessen Koeffizienten beliebig oft differenzierbar sind für $x \in \mathbb{R}$, d.h. $P(x, d_x) = d_x^m + a_1(x)d_x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(x)d_x + a_m(x)$ mit $a_k \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dieser Operator besitzt die Fundamentallösung: $H(x) = \theta_0(x)y(x)$, wobei $\theta_0 = \theta_0(x)$ die Heaviside-Funktion $\theta_0(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ und $y = y(x)$ die eindeutig bestimmte Lösung von $P(x, d_x)y = 0$ mit den Cauchy-Bedingungen $y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(m-2)}(0) = 0$ und $y^{(m-1)}(0) = 1$ sind.

Beweis. Wir berechnen sofort $H'(x) = \theta_0(x)y'(x)$, $H''(x) = \theta_0(x)y''(x)$, $\cdots$, $H^{(m-1)}(x) = \theta_0(x)y^{(m-1)}(x)$ und $H^m(x) = \delta_0 + \theta_0(x)y^{(m)}(x)$. Nach Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$P(x, d_x)H(x) = \delta_0 + \theta_0(x)P(x, d_x)y = \delta_0.$$

$\square$

2. Vorgelegt sei der Laplace-Operator $\triangle$ im $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$. Im Fall $n = 2$ erhalten wir $H_2(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x|$, d.h. die Fundamentallösung besitzt eine logarithmische Singularität. Im Fall $n \geq 3$ erhalten wir $H_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n}|x|^{-n+2}$, wobei $\sigma_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ gerade die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel ist. Weiterhin gilt $\Gamma(n/2) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n/2-1}dt,\ n \geq 3$. Damit besitzt die Fundamentallösung eine Polstelle der Ordnung $n-2$.

Beweis. Es gilt

$$\Delta \ln|x| = \Delta \ln r = \frac{1}{r}d_r(r d_r \ln r) = 0 \text{ für } r \neq 0.$$

Wir wählen ein beliebiges $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Der Träger von ϕ sei in der Kugel $K_R(0)$ mit dem Radius R um den Ursprung enthalten. Da $\ln|x|$ eine reguläre Distribution erzeugt, erhalten wir

$$\Delta \ln|x|(\phi) = \ln|x|(\Delta\phi) = \int_{K_R(0)} \ln|x|\Delta\phi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x| < R} \ln|x|\Delta\phi(x)dx.$$

Nach Anwendung der zweiten Greenschen Integralformel

$$\int_G (f\Delta\phi - \phi\Delta f)dx = \int_{\partial G} (f\partial_n\phi - \phi\partial_n f)ds$$

bekommen wir mit $f = \ln|x|$ und $G = \{\varepsilon < |x| < R\}$ die Beziehung

$$\Delta \ln|x|(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{|x|\in(\varepsilon,R)} \phi(x)\Delta \ln|x|dx + \int_{|x|=\varepsilon} (\ln|x|\partial_n\phi(x) - \phi\partial_n \ln|x|)ds\Big).$$

Hier nutzen wir das Trägerverhalten von ϕ. Mit $\Delta \ln|x| = 0$ in G folgt unmittelbar

$$\Delta \ln|x|(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{|x|=\varepsilon} (-\ln|x|\partial_n\phi(x) + \phi\partial_n \ln|x|)ds\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\phi(x)dx = 2\pi\phi(0).$$

Der Grenzwert des ersten Bestandteils des Integrals strebt gegen 0. Zusammenfassend ergibt sich $\Delta\frac{1}{2\pi}\ln|x| = \delta_0$, das wollten wir zeigen. □

Aufgabe 17 Führen Sie den Beweis für $n \geq 3$ durch. Welches alternative Hilfsmittel besitzen wir zum Beweis solcher Aussagen?

3. Vorgelegt sei der Cauchy-Riemann Operator $\partial_{\overline{z}}$ in $\mathbb{C}$. Als Fundamentallösung erhalten wir $H(z) = \frac{1}{\pi z}$.

4. Vorgelegt sei der Wärmeleitungsoperator $\partial_t - a^2\triangle, a > 0$, im $\mathbb{R}^n$ bezüglich der räumlichen Veränderlichen. Wir erhalten dann
$$H_n(t,x) = \frac{\theta_0(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\ \exp\Big(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\Big).$$

5. Vorgelegt sei der Wellenoperator $\partial_t^2 - a^2\triangle$, $a > 0$, im $\mathbb{R}^n$ bezüglich der räumlichen Veränderlichen. Wir erhalten dann
für $n = 1$ die Fundamentallösung $H_1(t,x) = \frac{1}{2a}\ \theta_0(at - |x|)$,
für $n = 2$ die Fundamentallösung $H_2(t,x) = \frac{\theta_0(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}$,
für $n = 3$ die Fundamentallösung $H_3(t,x) = \frac{\theta_0(t)}{2\pi a}\ \delta_0(a^2t^2 - |x|^2)$.

6. Vorgelegt sei der Transportoperator $\frac{1}{\nu}\partial_t + (\eta_0, \nabla\cdot) + \alpha\cdot$, wobei ν und α positive Konstanten und η_0 ein Einheitsvektor sind. Dann ergibt sich als Fundamentallösung $H_n(t,x) = \nu\theta_0(t)\exp(-\alpha\nu t)\delta_0(x - \nu t\eta_0)$.

7.2 Newtonsche Potentiale als Distributionenlösungen Poissonscher Differentialgleichungen

7.2.1 Die Newtonschen Potentiale

Zum Abschluß dieses Kapitels beschäftigen wir uns mit Distributionenlösungen der Poisson-Gleichung $\triangle u = f$.

1. Es sei $\rho \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Dann existieren
$V_n(x) = -H_n(x) * \rho$ (Newtonsches Potential mit der Dichte ρ),
$V_2(x) = -H_2(x) * \rho$ (logarithmisches Potential mit der Dichte ρ).
Es gilt demnach $\triangle V_n = -\triangle H_n(x) * \rho = -\delta_0 * \rho = -\rho$.

2. Falls $\rho = \rho(x)$ sogar eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist, dann heißt das entsprechende Newtonsche (logarithmische) Potential Volumenpotential (Flächenpotential) und berechnet sich nach der Formel
$$V_n(x) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy, \quad V_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \rho(y)\ln\frac{1}{|x-y|}\,dy.$$
Damit sind diese Potentiale durch klassische Faltungsintegrale darstellbar.

3. Es sei S eine beschränkte glatte Fläche mit gewählter Normalenrichtung n. Mit stetigen Funktionen $\mu = \mu(x)$ und $\nu = \nu(x)$ auf S seien $\mu\delta_S$ die einfache Schicht und $-\partial_\eta(\nu\delta_S)$ die doppelte Schicht auf S. Die von diesen erzeugten Newtonschen (logarithmischen) Potentiale

$$V_n^{(0)} = -H_n(x) * \mu\delta_S,\ n \geq 3, \quad V_2^{(0)} = -H_2(x) * \mu\delta_S,$$
$$V_n^{(1)} = H_n(x) * \partial_n(\nu\delta_S),\ n \geq 3, \quad V_2^{(1)} = H_2(x) * \partial_n(\nu\delta_S)$$

heißen Einfachschicht- und Doppelschichtpotentiale mit den Dichten μ oder ν. Diese berechnen sich durch

$$\begin{aligned}
V_n^{(0)}(x) &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}\, d\sigma_y,\ n \geq 3,\\
V_2^{(0)}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_S \mu(y)\ \ln\ \frac{1}{|x-y|}\, d\sigma_y,\\
V_n^{(1)}(x) &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_S \nu(y)\, \partial_{n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, d\sigma_y,\\
V_2^{(1)}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_S \nu(y)\, \partial_{n_y}\ \ln\ \frac{1}{|x-y|}\, d\sigma_y.
\end{aligned}$$

Die Newtonschen und die logarithmischen Potentiale mit den Dichten ρ, die Einfachschicht- und Doppelschichtpotentiale mit den Dichten μ und ν sind Distributionenlösungen von $\triangle u = f$ mit den entsprechenden Quellen $-\rho, -\mu\delta_S, \partial_\eta(\nu\delta_S)$.

7.2.2 Grenzbeziehungen und Unstetigkeitseigenschaften der Potentiale in beliebigen Aufpunkten

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit speziellen Eigenschaften von Volumen- und Flächenpotentialen bzw. Einfachschicht- und Doppelschichtpotentialen beschäftigen. Nach Abschnitt 7.2.1 sind diese Potentiale Distributionenlösungen von $\Delta u = f$.

Wir wollen an einführenden Beispielen wesentliche Fragestellungen motivieren.

1.Beispiel: Volumenhafte Ladungsverteilung

Vorgelegt sei folgende homogene räumliche Belegung $\rho = \frac{3L}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)}$ auf einer Kugelschale im $\mathbb{R}^3$ mit dem Innenradius R_1 und dem Außenradius R_2. Dann stellt sich das folgende Potential ein:
in den belegungsfreien Punkten

$$u = \begin{cases} \frac{3L}{2}\ \frac{R_1+R_2}{R_1^2+R_1R_2+R_2^2} & \text{für}\quad 0 \leq r < R_1,\\ \frac{L}{r} & \text{für}\quad r > R_2,\end{cases}$$

in den Belegungspunkten

$$u = \frac{L}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{3R_2^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r}\right) \quad \text{für}\ \ R_1 \leq r \leq R_2,$$
$$\text{also } u(r = R_1) = \frac{3L}{2}\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3},\ u(r = R_2) = \frac{L}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{2R_2^2}{2} - \frac{R_1^3}{R_2}\right) = \frac{L}{R_2}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{cases} \partial_n u_- = 0 & \text{auf } r = R_1,\\ \partial_n u_+ = \frac{L}{R_2^3 - R_1^3}(-r + \frac{R_1^3}{r^2}) = 0 & \text{auf } r = R_1,\end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_n u_- = -\frac{L}{R_2^2} & \text{auf } r = R_2, \\ \partial_n u_+ = -\frac{L}{r^2} & \text{auf } r = R_2. \end{cases}$$

2.Beispiel: Homogene Ladungsverteilung auf einer Kugeloberfläche mit dem Radius R
Dann erhalten wir das Einfachschichtpotential

$$u = \begin{cases} \frac{L}{R} & \text{für} \quad 0 \leq r \leq R, \\ \frac{L}{r} & \text{für} \quad r > R. \end{cases}$$

3.Beispiel: Homogene Dipolbelegung λ auf einer Kugeloberfläche mit dem Radius R
Dann erhalten wir das Doppelschichtpotential

$$u = \begin{cases} -4\pi\lambda & \text{für} \quad 0 \leq r < R, \\ 0 & \text{für} \quad r > R. \end{cases}$$

Folgende Fragen ergeben sich aus diesen Einführungsbeispielen:

1. Was geschieht mit dem Potential in Punkten, in denen Belegung vorhanden ist? Wie verhalten sich die Potentiale beim Übergang von belegungsfreien Punkten zu Belegungspunkten?

2. Welche geometrischen Eigenschaften muß die Menge der Belegungspunkte besitzen?

3. Sind folgende, aus den Motivationsbeispielen zu erkennende Ergebnisse zu verallgemeinern:
   Das Volumenpotential und deren Normalenableitung verhält sich stetig beim Durchgang durch den Rand der Belegungsmenge.
   Das Einfachschichtpotential verhält sich stetig beim Durchgang durch die Kugeloberfläche.
   Die Normalenableitung erleidet einen Sprung beim Durchgang durch die Kugeloberfläche.
   Das Doppelschichtpotential springt beim Durchgang durch die Kugeloberfläche, die Normalenableitung verhält sich stetig beim Durchgang durch die Kugeloberfläche.

Beschäftigen wir uns zuerst mit *Volumenpotentialen* (eine formale Übertragung der Ergebnisse auf Flächenpotentiale ist möglich).

Gegeben sei das Volumenpotential

$$V_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}} dy$$

mit einer integrierbaren Dichtefunktion $\rho = \rho(y)$ im $\mathbb{R}^n$, die einen kompakten Träger K besitzen soll. Dann ist V_n harmonisch außerhalb von K.

Theorem 7.3. *Das Volumenpotential V_n einer stückweise stetigen und absolut integrablen Dichte ρ ist im ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Die Ableitungen $\partial_{x_i} V_n$ können in der Form*

$$\partial_{x_i} V_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) \partial_{x_i}(|x-y|^{2-n}) dy$$

dargestellt werden. Damit ist die Vertauschung von Differentiation und Integration möglich. Für die Normalenableitung erhalten wir

$$\partial_n V_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) \partial_n(|x-y|^{2-n}) dy.$$

Bemerkungen. Die Existenz der 1. Ableitungen ist klar, wenn man beachtet, daß $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\partial_{x_i}(|x-y|^{2-n})dy$ ein schwach singuläres Integral darstellt. Wie das erste einführende Beispiel zeigt, ist die Stetigkeit der 2. Ableitungen im $\mathbb{R}^n$ i. allg. nicht erfüllt.

Wenden wir uns jetzt den *Einfachschichtpotentialen* $V_n^{(0)}$ zu, diese sind harmonisch außerhalb der Belegungsfläche.

Theorem 7.4. *Es sei $\rho = \rho(y)$ eine stetige Belegung auf einer stetig gekrümmten Belegungsfläche S. Dann ist das Einfachschichtpotential stetig in $\mathbb{R}^n$.*

Theorem 7.5. *Es sei $\rho = \rho(y)$ eine stetige Belegung auf einer stetig gekrümmten Belegungsfläche S. Dann erleidet die Normalenableitung $\partial_n V_n^{(0)}$ einen Sprung beim Durchgang durch die Schicht. Es gilt im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ die folgende Beziehung: $\partial_n V_{3+}^{(0)} - \partial_n V_{3-}^{(0)} = -4\pi\rho$. Dabei sind $\partial_n V_{n+}^{(0)}, \partial_n V_{n-}^{(0)}$ als Grenzwerte der Richtungsableitungen bei Annäherung an die Fläche entlang der Flächennormalen zu verstehen. Die Tangentialableitungen von $V_n^{(0)}$ zu beiden Seiten der Fläche stimmen überein.*

Die Stetigkeit der Einfachschichtpotentiale ist klar wenn man beachtet, daß

$$V_n^{(0)}(x) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_S \frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}}\, d\sigma_y,\ n \geq 3,$$
$$V_2^{(0)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \rho(y)\, \ln\, \frac{1}{|x-y|}\, d\sigma_y$$

schwach singuläre Integrale darstellen.

Wenden wir uns schließlich den Doppelschichtpotentialen $V_n^{(1)}$ zu, diese sind harmonisch außerhalb der Belegungsfläche.

Theorem 7.6. *Es sei $\rho = \rho(y)$ eine stetige Belegung auf einer stetig gekrümmten Belegungsfläche S. Dann verhält sich das Doppelschichtpotential $V_n^{(1)}$ unstetig beim Durchgang durch die Schicht S, d.h., das Doppelschichtpotential ist jeweils einseitig in innere Punkte hinein stetig fortsetzbar. Im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ gilt für die Grenzwerte $V_{3+}^{(1)}$ und $V_{3-}^{(1)}$ die Beziehung $V_{3+}^{(1)} - V_{3-}^{(1)} = 4\pi p$.*

Theorem 7.7. *Es sei $\rho = \rho(y)$ eine stetige Belegung auf einer stetig gekrümmten Belegungsfläche S. Existiert dann $\partial_n V_{n+}^{(1)}$ für eine abgeschlossene innere Teilfläche von S im Sinne gleichmäßiger Konvergenz bei Annäherung entlang den Flächennormalen, so existiert für dieselbe Teilfläche auch $\partial_n V_{n-}^{(1)}$ im entsprechenden Sinne, und beide Grenzwerte stimmen überein, d.h. $\partial_n V_{n+}^{(1)} = \partial_n V_{n-}^{(1)}$.*

Die Normalenableitung $\partial_n V_{n+}^{(1)}$ existiert z.B. für eine analytische Belegung auf einer analytischen Belegungsfläche.

Es ist klar, daß man die Stetigkeit des Doppelschichtpotentials i.allg. nicht erwarten kann, da die Potentiale

$$V_n^{(1)}(x) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_S \rho(y)\, \partial_{n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, d\sigma_y,$$
$$V_2^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \rho(y)\, \partial_{n_y}\, \ln\, \frac{1}{|x-y|}\, d\sigma_y$$

stark singuläre Integrale sind.

8 Funktionalanalytische Eigenschaften der Räume $D'(G)$

8.1 Funktionalanalytische Eigenschaften von Räumen beliebig oft differenzierbarer Funktionen

8.1.1 Räume über regulär kompakte Mengen

In Kapitel 2 haben wir den Begriff einer regulär kompakten Menge eingeführt. Es sei eine solche kompakte Menge vorgelegt.

Definition 8.1. *Mit $C^\infty(K)$ definieren wir den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf K. Die Topologie in $C^\infty(K)$ wird durch das System $p_k(\cdot) = max_{|\alpha|\le k}\|\partial_x^\alpha \cdot\|_{C(K)}$ erzeugt. Eine Folge $\{f_n\}_n$ von Funktionen aus $C^\infty(K)$ strebt gegen eine Funktion $f \in C^\infty(K)$, falls $\lim_{n\to\infty} p_k(f_n - f) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.*

Wollen wir uns einige der Eigenschaften von $C^\infty(K)$ klar machen.

1. Der Raum ist ein lokalkonvexer Raum. Seine Topologie wird sogar durch ein abzählbares System von Normen erzeugt.

2. Der Raum ist vollständig.

   Beweis. Es sei $\{f_n\}_n$ eine Cauchy-Folge aus $C^\infty(K)$. Dann ist für jedes k die Folge eine Cauchy-Folge in $C^k(K)$. Wegen der Vollständigkeit von $C^k(K)$ existiert ein eindeutig bestimmter Grenzwert $\tilde{f}_k$. Da nun der Raum $C^l(K)$ stetig eingebettet ist in dem Raum $C^k(K)$ für $l \ge k$, muß wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes in jedem Raum $C^k(K)$ die Beziehung $\tilde{f}_l = \tilde{f}_k$ für $l \ge k$ erfüllt sein. □

3. Der Raum ist metrisierbar.

   Beweis. Hier kommt uns zugute, daß die Topologie durch eine abzählbare Familie von Seminormen erzeugt wird. Wir definieren die Metrik

   $$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(f-g)}{1+p_k(f-g)} \text{ für beliebige } f,g \in C^\infty(K).$$

   Man überprüft leicht die Eigenschaften einer Metrik. □

4. Der Raum ist ein Frechet-Raum. So nennt man jeden vollständigen Raum, dessen Topologie durch ein abzählbares System von Seminormen erzeugt wird.

5. Der Raum ist ein Montel-Raum. Einen lokalkonvexen Raum nennt man Montel-Raum wenn in ihm jede abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt ist.

   Beweis. Es sei M eine beschränkte und abgeschlossene Menge aus $C^\infty(K)$, d.h. zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante C_k mit $p_k(f) \le C_k$ für alle $f \in M$. Da der Raum $C^\infty(K)$ ein metrischer Raum ist, ist die Eigenschaft der Kompaktheit äquivalent zur Folgenkompaktheit. Wir werden letztere beweisen. Es sei $\{f_n\}_n$ eine Folge aus M. Dann ist diese beschränkt in $C^1(K)$. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist diese relativ kompakt in $C(K)$, d.h. es existiert eine konvergente Teilfolge $\{f_n^{(1)}\}_n$ in $C(K)$. Diese Teilfolge ist beschränkt in $C^2(K)$. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist diese relativ kompakt in $C^1(K)$, d.h. es existiert eine konvergente Teilfolge $\{f_n^{(2)}\}_n$ in $C^1(K)$. Nun können wir Schritt bei Schritt dieses Verfahren fortsetzen. Auf diese Weise erhalten wir in $C^l(K)$ konvergente Teilfolgen $\{f_n^{(l+1)}\}_n$. Betrachten wir die Diagonalfolge $\{f_l^{(l)}\}_l$, dann konvergiert diese in jedem $C^l(K)$, also als Folge aus M auch im Raum $C^\infty(K)$. Die Vollständigkeit des $C^\infty(K)$ liefert uns ein Grenzelement, welches wegen der Abgeschlossenheit von M zu M gehört. □

Frage: Welche anderen Montel-Räume sind bekannt?

Einen Teilraum $D(K)$ des $C^\infty(K)$ wollen wir besonders auszeichnen, den Raum der auf ∂K flachen Funktionen.

Definition 8.2. *Mit $D(K)$ bezeichnen wir den Abschluß der Menge $C_0^\infty(int K)$ in $C^\infty(K)$. Der Raum $D(K)$ wird als der Raum der in K getragenen Testfunktionen bezeichnet.*

Wir wollen am Ende dieses Abschnittes noch zwei spezielle Familien von Frechet-Räumen kennenlernen.

Definition 8.3. *Vorgelegt sei eine Folge $\{E_k\}_k$ von Frechet-Räumen, die folgender Eigenschaft genügt:*
"Jeder Frechet-Raum E_{k+1} ist stetig eingebettet in den Frechet-Raum E_k."

1. *Durch $E := \bigcap_k E_k$ definieren wir den projektiven Limes der Folge $\{E_k\}_k$, im Symbol: $E := lim\ proj\, E_k$.*
2. *Durch $E := \bigcup_k E_k$ definieren wir den induktiven Limes der Folge $\{E_k\}_k$, im Symbol: $E := lim\ ind\, E_k$.*

Der projektive Limes von Frecheträumen ist wieder ein Frechet-Raum. Der induktive Limes von Frecheträumen ist i.allg. kein Frechetraum mehr.

Frage: Wie ist die Konvergenz in lim proj E_k bzw. in lim ind E_k definiert?

8.1.2 Räume über Gebiete

Vorgegeben sei jetzt ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$. Wie in Definition 2.1 wählen wir eine Folge $\{K_n\}_n$ regulär kompakter Mengen, die das Gebiet G monoton ausschöpft. Dann wählen wir den Banachraum $E_n := C^n(K_n)$. Dann können wir den Funktionenraum $C^\infty(G)$ auch wie folgt einführen:

Definition 8.4. *Der Raum $C^\infty(G)$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf G ergibt sich als*

$$C^\infty(G) = lim\ proj\, E_n \ mit\ E_n = C^n(K_n).$$

Machen wir uns wieder mit Eigenschaften dieses Raumes vertraut.

1. Der Raum ist lokalkonvex, die Topologie wird erzeugt durch das System der Seminormen $p_{K_n,n}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Der Raum ist vollständig und metrisierbar, da ein abzählbares System von Seminormen zur Beschreibung der Topologie ausreicht.
3. Der Raum ist ein Frechetraum. Er ist ein Montelraum.

   Aufgabe 18 Beweisen Sie die Montelraum-Eigenschaft. Gibt es Änderungen in der Beweisführung im Vergleich mit der für die Montelraum-Eigenschaft des $C^\infty(K)$?

Wenden wir uns jetzt noch einmal dem Raum $C_0^\infty(G)$ zu. Wie oben wählen wir die Folge $\{K_n\}_n$.

Definition 8.5. *Der Raum $C_0^\infty(G)$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in G ergibt sich als*

$$C_0^\infty(G) = lim\ ind\, D(K_n).$$

Um Eigenschaften dieses Raumes verstehen zu können, müssen wir Grundlagen der Theorie topologischer Räume, topologischer Vektorräume und der Theorie lokalkonvexer Räume verstehen. Diese wird in den nächsten beiden Abschnitten zur Verfügung gestellt.

8.2 Grundlagen der Theorie topologischer Räume

Wir studieren in diesem Abschnitt Mengen mit einer topologischen Struktur.

Definition 8.6. *Eine Menge X heißt ein topologischer Raum, wenn in X ein System $\mathcal{M} = \{M \subset X\}$ von Teilmengen ausgezeichnet ist, das die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *Die Vereinigung einer beliebigen Familie von Mengen aus $\mathcal{M}$ gehört zu $\mathcal{M}$.*
2. *Der Durchschnitt von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{M}$ gehört zu $\mathcal{M}$.*
3. *Die leere Menge und die Menge X selbst gehören zu $\mathcal{M}$.*

Man sagt auch: das System $\mathcal{M}$ definiert auf X eine Topologie $\tau = (X, \mathcal{M})$. Die Elemente von $\mathcal{M}$ heißen offene Mengen dieser Topologie.

Es sei x ein Punkt des topologischen Raumes X. Jede offene Menge, die x enthält, heißt *offene Umgebung* von x. Ist $x \in U$ und existiert ein $M \subset \mathcal{M}$ mit $x \in M$ und $M \subset U$, so nennt man U Umgebung von x, die natürlich nicht notwendig offen ist.

Theorem 8.1. *Mit $\mathcal{U}_x$ bezeichnen wir die Familie aller Umgebungen U des Punktes x eines topologischen Raumes X. Dann besitzt $\mathcal{U}_x$ die folgenden Eigenschaften:*

1. *Für alle $U \in \mathcal{U}_x$ gilt $x \in U$; $X \in \mathcal{U}_x$.*
2. *Aus $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x$ folgt $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$.*
3. *Ist $U \in \mathcal{U}_x$ und $U \subset W \subset X$, so ist auch $W \in \mathcal{U}_x$.*
4. *Ist $U \in \mathcal{U}_x$, so gibt es ein $V \in \mathcal{U}_x$ mit $U \in \mathcal{U}_y$ für alle $y \in V$.*

Beweis. Die Richtigkeit der ersten drei Eigenschaften folgt sofort aus den Definitionen für offene Umgebungen bzw. für Umgebungen. Ist $U \in \mathcal{U}_x$, so existiert ein offenes $V \in \mathcal{U}_x$ mit $V \subset U$. Dann ist V Umgebung jedes Punktes $y \in V$. Also ist auch die Obermenge U von V eine Umgebung jedes Punktes $y \in V$. $\square$

Es gilt sogar eine Art Eindeutigkeitsaussage.

Theorem 8.2. *Es sei auf einer Menge X für jeden Punkt x ein System $\mathcal{U}_x$ von Teilmengen von X als Umgebungssystem von x gegeben. Dieses System soll die Eigenschaften 1) bis 4) aus Theorem 8.1 erfüllen. Dann gibt es genau eine Topologie auf X, welche diese Umgebungen und keine weiteren besitzt.*

Ein Teilsystem $\mathcal{V}_x$ des Systems $\mathcal{U}_x$ aller Umgebungen von $x \in X$ nennt man eine *Umgebungsbasis* von x, falls sich zu jedem $U \in \mathcal{U}_x$ ein $V \in \mathcal{V}_x$ mit $V \subset U$ finden läßt. Alle x enthaltenden offenen Mengen bilden offensichtlich eine *Umgebungsbasis* von x.

Ein topologischer Raum erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt eine *abzählbare Umgebungsbasis* besitzt.

Sind auf der Grundmenge X zwei Topologien $\tau_1 = (X, \mathcal{M}_1)$ und $\tau_2 = (X, \mathcal{M}_2)$ erklärt, dann lassen sich diese Topologien eventuell vergleichen. Ist jede bez. τ_1 offene Menge auch offen bez. τ_2, ist also $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, so heißt die Topologie τ_2 feiner als τ_1 oder τ_1 gröber als τ_2.

Beispiele. 1. Es seien als offene Mengen nur die leere Menge und die Grundmenge X selbst festgelegt. Diese so definierte Topologie ist gröber als jede andere Topologie auf X. Sie heißt gröbste oder auch *indiskrete Topologie*.
2. Offene Mengen in X seien alle Teilmengen von X. Diese Topologie auf X heißt *diskrete Topologie*. Sie ist feiner als jede andere Topologie auf X.

Theorem 8.3. *Es seien $\mathcal{U}_x^1$ und $\mathcal{U}_x^2$ zwei Familien von Umgebungen von $x \in X$ und $\mathcal{V}_x^1$ und $\mathcal{V}_x^2$ Umgebungsbasen von x in den Topologien τ_1 und τ_2 auf X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$,
2. *für alle $x \in X$ gilt $\mathcal{U}_x^1 \subset \mathcal{U}_x^2$,*
3. *für alle $x \in X$ und jedes $V_1 \in \mathcal{V}_x^1$ existiert $V_2 \in \mathcal{V}_x^2$ mit $V_2 \subset V_1$.*

Aufgabe 19 Beweisen Sie diesen Satz.

Ein topologischer Raum X heißt *Hausdorffraum* oder *separiert*, wenn zwei verschiedene Punkte x und y disjunkte Umgebungen besitzen.

Wenden wir uns jetzt Abbildungen in topologischen Räumen zu. Gegeben sei eine Abbildung $f : X \to Y$ eines topologischen Raumes X in einen topologischen Raum Y.

Definition 8.7. *Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt im Punkt $x \in X$ stetig, falls für jede Umgebung U von $y := f(x)$ das Urbild $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von $x \in X$ ist. Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, falls sie in jedem Punkt von X stetig ist.*

Es gilt dann folgender Satz, der einen bekannten Satz für metrische Räume aus dem "Grundkurs Analysis" verallgemeinert.

Theorem 8.4. *Vorgelegt sei eine Abbildung $f : X \to Y$. Es ist f genau dann stetig, wenn für jede in Y offene Menge M das Urbild $f^{-1}(M)$ offen in X ist.*

Beweis. Es sei f stetig und die Menge M offen in Y. Ist $f^{-1}(M)$ die leere Menge, dann ist die Behauptung bewiesen. Es sei also $x \in f^{-1}(M)$. Dann folgt $f(x) \in M$. Die Menge M ist als offene Menge eine Umgebung von $f(x)$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f existiert eine Umgebung $V \subset X$ mit $V \subset f^{-1}(M)$. Daher ist $f^{-1}(M)$ Umgebung jedes seiner Punkte. Da nun eine Umgebung V offen ist genau dann, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist, folgt die Behauptung.
Zum Beweis der Umkehrung wählen wir eine Umgebung U von $f(x) \in Y$. Dann existiert eine offene Umgebung M von $f(x)$ mit $M \subset U$. Es folgen $x \in f^{-1}(M)$ und $f^{-1}(M) \subset f^{-1}(U)$. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(M)$ offen, also Umgebung von x. Als Obermenge von $f^{-1}(M)$ ist dann auch $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x. Damit ist die Abbildung f tatsächlich stetig in x. □

Definition 8.8. *Eine Folge* $\{x_n\}_n$ *aus* X *heißt konvergent gegen* $x \in X$, *wenn für jede Umgebung* U *von* x *ein Index* $n_0 = n_0(U)$ *so existiert, daß* $x_n \in U$ *für alle* $n \geq n_0$ *erfüllt ist.*

Zum Ende dieses Abschnittes interessiert uns die Charakterisierung der Stetigkeit einer Abbildung mit Hilfe von Folgen.

Theorem 8.5. *Es sei* $f : X \to Y$ *eine in* $x \in X$ *stetige Abbildung. Dann gilt: Für jede in* X *gegen* x *konvergente Folge* $\{x_n\}_n$ *konvergiert die Folge der Bilder* $\{f(x_n)\}_n$ *in* Y *gegen* $f(x)$.

Beweis. Es sei U eine Umgebung von $f(x)$ in Y. Da f in x stetig ist, ergibt sich $f^{-1}(U)$ als Umgebung von x. Also exisitiert nach Annahme ein $n_0(U)$ so, daß $x_n \in f^{-1}(U)$ für $n \geq n_0$ gilt. Damit ist $f(x_n) \in U$ für alle $n \geq n_0$. □

Beachte. Die Umkehrung dieses Satzes gilt im allgemeinen nicht!

Aufgabe 20 Machen Sie sich alle eingeführten Begriffe dieses Abschnittes anhand der diskreten und indiskreten Topologie klar.

Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, und sind sowohl f, als auch f^{-1} stetig, dann spricht man von einem *Homöomorphismus* oder auch von einer *homöomorphen Abbildung*.

8.3 Grundlagen der Theorie linearer topologischer Räume

In diesem Abschnitt wollen wir Eigenschaften linearer topologischer Räume kennenlernen. Ein vorgelegter Raum X besitzt neben der topologischen Struktur $\tau = (X, \mathcal{M})$ noch eine lineare Struktur über einen Körper K.

Definition 8.9. *Eine Menge* X *heißt linearer topologischer Raum über* K *oder auch topologischer Vektorraum über* K, *wenn für* X *die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

1. *Es ist* X *ein linearer Raum über* K.
2. *Es ist* X *ein topologischer Raum.*
3. *Die Addition und die Multiplikation mit Skalaren in* X *sind stetige Abbildungen von* $X \times X$ *bzw. von* $K \times X$ *in* X.

Die Eigenschaft 3 verknüpft beide Strukturen, die lineare mit der topologischen. Dadurch werden beide Strukturen verträglich. Die Eigenschaft 3 lautet ausführlich:

4. Zu jeder Umgebung U_z *von* $z = x + y$ *in* X *existieren Umgebungen* U_x *und* U_y *von* x *bzw.* y *in* X *mit* $U_x + U_y \subset U_z$. *Zu jeder Umgebung* U_z *von* $z = \alpha x$ *in* X *gibt es Umgebungen* V_α *von* α *in* K *und* U_x *von* x *in* X *mit* $V_\alpha U_x \subset U_z$.

Der folgende Satz hat eine große Bedeutung. Er erklärt, daß die topologische Struktur eines topologischen Vektorraumes durch eine Umgebungsbasis des Nullelements in X vollständig bestimmt ist. Es wird daher genügen, nur Umgebungen von $0 \in X$ zu betrachten. Wenn in Zukunft von Umgebungen (Umgebungsbasen) gesprochen wird, dann konzentrieren wir uns immer auf Umgebungen (Umgebungsbasen) des Nullelements $0 \in X$.

Theorem 8.6. *Es seien* X *ein topologischer Vektorraum über* K *und* $a \in X$. *Die Abbildung* $f : X \to X$ *mit* $f(x) = x + a$ *ist ein Homöomorphismus von* X *auf* X. *Ist* $U \subset X$ *eine Umgebung von* 0, *so ist* $W := U + a$ *eine Umgebung von* a. *Ist* $W \subset X$ *eine Umgebung von* a, *so ist* $U := W - a$ *eine Umgebung von* 0. *Bildet* $\mathcal{V}$ *eine Umgebungsbasis von* 0 *in* X, *so bildet* $\mathcal{V} + a$ *eine Umgebungsbasis von* a *in* X.

Theorem 8.7. *Es seien X ein topologischer Vektorraum über K und $\alpha \in K$ mit $\alpha \neq 0$. Die Abbildung $f : X \to X$ mit $f(x) = \alpha x$ ist ein Homöomorphismus von X auf X. Ist U eine Umgebung von 0, so ist auch αU eine Umgebung von 0.*

Für die Formulierung des folgenden Satzes benötigen wir verschiedene Begriffe.

Eine Menge M des topologischen Vektorraumes X heißt *konvex*, falls für jede Zahl $a \in [0,1]$ gilt $aM + (1-a)M \subset M$.

Eine Menge M des topologischen Vektorraumes X heißt *absorbierend*, falls für jedes Element $x \in X$ eine positive Zahl $a = a(x)$ existiert mit $\alpha^{-1}x \in M$ für alle $\alpha \in K : |\alpha| \geq a$.

Eine Menge M des topologischen Vektorraumes X heißt *kreisförmig*, falls für jede Zahl $\alpha \in K$ mit $|\alpha| \leq 1$ gilt $\alpha M \subset M$.

Theorem 8.8. *Ist $\mathcal{V}$ eine Umgebungsbasis (des Nullelementes) des topologischen Vektorraumes X über den Körper K, so besitzt jedes $V \in \mathcal{V}$ die folgenden Eigenschaften:*

1. *Es ist V absorbierend.*
2. *Es gibt ein $V_1 \in \mathcal{V}$ mit $V_1 + V_1 \subset V$.*
3. *Es existiert eine kreisförmige Umgebung W mit $W \subset V$.*

Beweis. Es seien $a \in X$ und $V \in \mathcal{V}$. Wir betrachten den im Theorem 8.7 besprochenen Homöomorphismus. Betrachten wir jetzt $h : K \to X$ mit $h(\alpha) = \alpha a$, dann ist h stetig in $0 \in X$. Also existiert ein kleines Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ um $0 \in K$ mit $\eta a \in V$ für $\eta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Damit ist aber auch $\mu^{-1}a \in V$ für alle $|\mu| > \varepsilon^{-1}$. Insgesamt ist damit V absorbierend.

Die Addition $x + y$ ist in $x = y = 0$ stetig. Also existieren zu gegebenem $V \in \mathcal{V}$ Umgebungen U_x und U_y mit $U_x + U_y \subset V$. Da dann auch $U_x \cap U_y$ eine Umgebung ist, liefert die Basiseigenschaft von $\mathcal{V}$ eine Umgebung $V_1 \in \mathcal{V}$ mit $V_1 \subset U_x \cap U_y$. Mit diesem V_1 gilt $V_1 + V_1 \subset V$.

Wegen der Stetigkeit der Multiplikation in $\alpha = 0$ und $x = 0$, können wir ein Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ in K und eine Umgebung U von $x = 0$ so wählen, daß $\eta U \subset V$ mit $|\eta| < \varepsilon$. Somit ist ηU eine Nullumgebung. Dann ist auch $W := \cup_{|\eta|<\varepsilon} \eta U \subset V$ auch eine (Null)Umgebung. Diese ist kreisförmig. $\square$

Wir werden im weiteren immer annehmen können, daß die Mengen einer Umgebungsbasis stets kreisförmig sind. Interessant für uns ist eine Umkehrung des letzten Satzes.

Theorem 8.9. *In einem linearen Raum X über den Körper K sei ein nichtleeres System $\mathcal{V}$ von Teilmengen $V \subset X$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben:*

1. *Die Mengen $V \in \mathcal{V}$ sind kreisförmig und absorbierend.*
2. *Sind $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, so existiert ein $V_3 \in \mathcal{V}$ mit $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.*
3. *Ist $V \in \mathcal{V}$, so gibt es ein $V_1 \in \mathcal{V}$ mit $V_1 + V_1 \subset V$.*

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich auf X genau eine Topologie einführen und X wird mit dieser Topologie ein topologischer Vektorraum. Das System $\mathcal{V}$ bildet hierbei eine Umgebungsbasis.

Beweis. Um eine Topologie auf X zu erklären, ziehen wir das Theorem 8.2 heran. Es sei $\mathcal{U}$ die Familie aller Teilmengen von X, die eine Menge aus $\mathcal{V}$ enthalten. Ferner sei $\mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}$ für jedes $x \in X$. Wir zeigen, daß für jedes $x \in X$ die Familie $\mathcal{U}_x$ die Eigenschaften 1) bis 4) aus Theorem 8.2 erfüllt.

Es gilt offensichtlich $X \in \mathcal{U}$. Da jedes $V \in \mathcal{V}$ kreisförmig ist, enthält V mit $x \in X$ auch das Nullelement von X, welches dann auch in jeder nichtleeren Menge U von $\mathcal{U}$ liegt.

Sind U_1 und U_2 aus $\mathcal{U}$, dann existieren nach Voraussetzung Mengen V_1 und V_2 aus $\mathcal{V}$ und nach Voraussetzung 2) eine Menge $V_3 \in \mathcal{V}$ mit $V_3 \subset V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2$, also ist auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$. Daraus folgt wiederum $(U_1 + x) \cap (U_2 + x) \in \mathcal{U}_x$.

Wählen wir $U + x \in \mathcal{U}_x$, $U \in \mathcal{U}$ und $U \subset W$, so existiert ein $V \in \mathcal{V}$ mit $V \subset U$, also auch $V \subset W$. Somit gehören W zu $\mathcal{U}$ und $W + x$ zu $\mathcal{U}_x$.

Zu $U \in \mathcal{U}$ existiert ein $V \in \mathcal{V}$ mit $V \subset U$. Nach der Eigenschaft 3) gibt es ein $V_1 \in \mathcal{V}$ mit $V_1 + V_1 \subset V$. Also gilt auch $V_1 + V_1 + x \subset U + x$. Setzt man $W := V_1 + x$, so ist $W \in \mathcal{U}_x$ und $W \subset U + x$. Für $y \in W$ ist $V_1 + y \subset U + x$, d.h. $U + x$ ist Umgebung von y, also auch aus der Familie $\mathcal{U}_y$.

Damit haben wir alle Voraussetzungen von Theorem 8.2 überprüft. Es gibt folglich auf X genau eine Topologie mit den Umgebungen $U + x$ und keine weiteren. Wir müssen schließlich noch zeigen, daß die topologische Struktur mit der algebraischen verträglich ist. □

Definition 8.10. *Existiert in einem topologischen Vektorraum X über einen Körper K eine (Null)Umgebungsbasis $\mathcal{V}$ mit konvexen Mengen $V \subset X$, so heißt der topologische Vektorraum lokalkonvex.*

Es sind dann auch die Mengen $V + x$ der Umgebungsbasis $\mathcal{V}_x$ von $x \in X$ konvex. Erfüllt der topologische Vektorraum das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, so gibt es bekanntlich eine *abzählbare Umgebungsbasis* $\{V_l\}_{l\in\mathbb{N}}$. Setzt man $W_l := \cap_{n=1}^{l} V_n$, so bildet die Familie $\{W_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine abzählbare Umgebungsbasis, jetzt gilt aber $W_{l+1} \subset W_l$. Wir können somit von vornherein annehmen, daß ein topologischer Vektorraum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, eine abzählbare (Null)Umgebungsbasis $\{V_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ mit $V_{l+1} \subset V_l$ besitzt.

Beispiel. Es sei X ein normierter Vektorraum mit der Norm $\|\cdot\|$. Bildet man die Familie $\mathcal{V} = \{V_\varepsilon, \varepsilon > 0$, der offenen Kugeln $V_\varepsilon = \{x \in X : \|x\| < \varepsilon\}\}$, so erfüllt $\mathcal{V}$ die Voraussetungen 1) bis 3) von Theorem 8.9. Die Mengen sind konvex. Damit wird X ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, der separiert ist.

Im folgenden Satz beschreiben wir den Zusammenhang zwischer einer (Null)Umgebungsbasis und der Separiertheit eines topologischen Vektorraumes.

Theorem 8.10. *Es sei X ein topologischer Vektorraum über den Körper K. Gegeben sei weiterhin eine Umgebungsbasis $\mathcal{V}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Der Raum X ist separiert.*
2. *Für jedes $x \in X$ mit $x \neq 0$ existiert ein $V \in \mathcal{V}$ mit $x \notin V$.*
3. *Es ist $\cap_{V\in\mathcal{V}} V = \{0\}$.*

Beweis. Aus 1) folgt 2) und aus 2) folgt 3) ist leicht zu zeigen. Wenden wir uns der Implikation aus 3) folgt 1) zu. Es seien $x, y \in X$ mit $x - y \neq 0$, also $x \neq y$ gewählt. Nach 3) existiert ein $V \in \mathcal{V}$ mit $x - y \notin V$. Nach Theorem 8.8 existiert ein $V_1 \in \mathcal{V}$ mit $V_1 + V_1 \subset V$ und somit $x - y \notin V_1 + V_1$. Dann sind die Umgebungen $V_1 + x$ und $V_1 + y$ von x und y disjunkt. Also ist X tatsächlich separiert. □

Die lineare Struktur des topologischen Vektorraumes erlaubt wie üblich die Begriffe Cauchy-Folge und konvergente Folge einzuführen. So ist z.B. eine vorgelegte Folge $\{x_l\}_l$ eine Cauchy-Folge, falls für jede (Null)Umgebung U ein Index $l_0(U)$ so existiert, daß $x_l - x_m \in U$ für alle $l, m \geq l_0$ erfüllt ist. Wenden wir uns schließlich noch Abbildungen topologischer Vektorräume zu.

Theorem 8.11. *Es seien X und Y topologische Vektorräume über einen Körper K. Vorgelegt sei eine lineare Abbildung $f : X \to Y$. Dann ist f entweder überall stetig oder nirgends. Setzen wir zusätzlich Separiertheit sowie Gültigkeit des ersten Abzählbarkeitsaxioms für X voraus und folgt für jede Folge $\{x_l\}_l$ aus X mit $x_l \to \tilde{x}$ die Konvergenz der Bilder $f(x_l) \to f(\tilde{x})$ in Y, so ist f stetig in $\tilde{x}$.*

Beweis. Es sei f in $x = 0$ stetig. Wir zeigen die Stetigkeit in $x = \tilde{x}$. Es sei eine Umgebung $W + \tilde{y}$ von $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ in Y gewählt. Nach Voraussetzung gibt es eine (Null)Umgebung U in X mit $f(U) \subset W$, denn W ist eine Umgebung des Bildpunktes 0 in Y. Wir betrachten die Umgebung $U+\tilde{x}$ von $\tilde{x}$ in X. Für $x \in U+\tilde{x}$ ergibt sich $f(x) \in f(U)+\tilde{y}$. Somit ist $f(U+\tilde{x}) \subset f(U)+\tilde{y} \subset W+\tilde{y}$. Also ist f stetig in $\tilde{x}$.

Angenommen f ist nicht stetig in $\tilde{x}$. Dann gibt es eine Umgebung W von $f(\tilde{x})$ in Y mit $f(U) \not\subset W$ für alle Umgebungen $U \in \mathcal{U}_{\tilde{x}}$ von $\tilde{x}$. Es existiert eine abzählbare (Null)Umgebungsbasis $\{V_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ mit $V_{l+1} \subset V_l$. Die vorausgesetzte Separiertheit liefert $\cap_{l=0}^{\infty} V_l = \{0\}$. Nach Annahme ergibt sich $f(V_l + \tilde{x}) \not\subset W$. Es lassen sich deshalb Elemente $x_l \in V_l + \tilde{x}$ mit $f(x_l) \notin W$ finden. Die Eigenschaften der V_l sichern $x_l \to \tilde{x}$. Nach Voraussetzung gilt aber $f(x_l) \to f(\tilde{x})$. Hieraus folgt aber $f(x_{l_0}) \in W$ für hinreichend großes l_0, im Widerspruch zur Annahme $f(x_l) \notin W$. $\square$

Beachte. Die zweite Aussage des letzten Satzes stellt eine Art Umkehrung von Theorem 8.5 dar für den Fall von linearen Abbildungen f unter zusätzlichen Voraussetzungen an X.

Definition 8.11. *Es sei X ein topologischer Vektorraum über den Körper K. Dann definiert X' oder auch X^* den dualen Vektorraum über den Körper K. Dabei ist*

$$X' := \{f : X \to K, \text{ mit } f \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Aufgabe 21 Machen Sie sich alle eingeführten Begriffe dieses Abschnittes anhand der diskreten und indiskreten Topologie klar.

8.4 Vektorräume mit einem System von Halbnormen

Die relevanten Funktionenräume der Distributionentheorie sind häufig durch Systeme von Halbnormen topologisiert.

Definition 8.12. *Es sei X ein Vektorraum über den Körper K. Das System $\mathcal{P} = \{p_j : p_j \text{ ist eine Halbnorm auf } X\}$ mit $j \in J$ und J beschreibt eine Indexmenge, die endlich, abzählbar oder überabzählbar sein kann, heißt filtrierend, wenn für je zwei Halbnormen p_l, $p_k \in \mathcal{P}$ positive Zahlen a_l, a_k und eine Halbnorm $p_j \in \mathcal{P}$ existieren mit $a_l p_l(x) \leq p_j(x)$ und $a_k p_k(x) \leq p_j(x)$ für alle $x \in X$.*

Haben wir also zwei Halbnormen des Systems aller Halbnormen vorgegeben, dann läßt sich immer eine dritte finden, die in der gleichen Richtung vergleichbar ist mit den anderen beiden Halbnormen.

Theorem 8.12. *Es sei auf dem Vektorraum X über den Körper K ein filtrierendes System $\mathcal{P} = \{p_j : j \in J\}$ von Halbnormen gegeben. Wir bilden für beliebige $\varepsilon > 0$ die Mengen*

$$V_{j,\varepsilon} = \{x \in X : p_j(x) < \varepsilon\}.$$

Wir fassen alle diese Mengen zu einem Mengensystem $\mathcal{V} = \{V_{j,\varepsilon}\}$ zusammen. Dann erfüllt dieses System $\mathcal{V}$ die Eigenschaften von Theorem 8.9. Folglich läßt sich auf X genau eine Topologie τ definieren. Damit wird X ein topologischer Vektorraum über K. Das System $\mathcal{V}$ bildet eine Umgebungsbasis. Außerdem ist X lokalkonvex. Die Halbnormen p_j sind stetig.

Beweis. Es ist leicht zu zeigen, daß die Mengen $V_{j,\varepsilon}$ kreisförmig, konvex und absorbierend sind.
Es seien V_{l,ε_l} und V_{k,ε_k} vorgegeben. Da das System der Halbnormen filtrierend ist, existiert nach Definition 8.12 eine Halbnorm p_j so, daß $a_l p_l(x) \leq p_j(x)$ und $a_k p_k(x) \leq p_j(x)$ für alle $x \in X$ mit geeigneten positiven Konstanten a_l und a_k erfüllt ist. Setzen wir $\varepsilon = \min\{\varepsilon_l a_l, \varepsilon_k a_k\}$, so erhalten wir für $x \in V_{j,\varepsilon}$ sofort die Beziehungen

$$p_l(x) \leq \frac{1}{a_l} p_j(x) < \frac{\varepsilon}{a_l} \leq \varepsilon_l, \quad p_k(x) \leq \frac{1}{a_k} p_k(x) < \frac{\varepsilon}{a_k} \leq \varepsilon_k.$$

Damit gehört x zu $V_{l,\varepsilon_l} \cap V_{k,\varepsilon_k}$, und wir erhalten die Inklusion $V_{j,\varepsilon} \subset V_{l,\varepsilon_l} \cap V_{k,\varepsilon_k}$.
Ist $V_{j,\varepsilon}$ vorgegeben, so zeigt man sofort die Inklusion $V_{j,\frac{\varepsilon}{2}} + V_{j,\frac{\varepsilon}{2}} \subset V_{j,\varepsilon}$.
Für $x \in V_{j,\varepsilon} + \tilde{x}$ erhalten wir $|p_j(x) - p_j(\tilde{x})| \leq p_j(x - \tilde{x}) < \varepsilon$. Damit erhalten wir die Stetigkeit von p_j in $\tilde{x}$. □

Wir werden jetzt einige Resultate ohne Beweis liefern.

Theorem 8.13. *Es sei X ein topologischer Vektorraum über den Körper K, dessen Topologie durch ein filtrierendes System $\mathcal{P} = \{p_j : j \in J\}$ von Halbnormen erzeugt wird. Dann ist X separiert genau dann, wenn für jedes $x \in X$ mit $x \neq 0$ eine Halbnorm $p_j = p_j(x)$ mit $p_j(x) > 0$ existiert.*

Aufgabe 22 Beweisen Sie die Aussage des Theorems 8.13.

Theorem 8.14. *Es sei X ein topologischer Vektorraum über den Körper K, dessen Topologie durch ein filtrierendes System $\mathcal{P} = \{p_j : j \in J\}$ von Halbnormen erzeugt wird. Es gilt $\{x_l\}_l \to \tilde{x}$ für eine Folge $\{x_l\}_l$ aus X und $\tilde{x} \in X$ genau dann, wenn für alle $p_j \in \mathcal{P}$ gilt $\lim_{l\to\infty} p_j(x_l - \tilde{x}) = 0$. Aus $\{x_l\}_l \to \tilde{x}$ folgt für alle p_j die Beziehung $\lim_{l\to\infty} p_j(x_l) = p_j(\tilde{x})$.*

Aufgabe 23 Beweisen Sie die Aussage des Theorems 8.14.

Theorem 8.15. *Es seien X und Y topologische Vektorräume über den Körper K, deren Topologien durch filtrierende Systeme $\mathcal{P} = \{p_j : j \in J,\, p_j : X \to \mathbb{R}\}$ bzw. $\mathcal{Q} = \{q_l : l \in L,\, q_l : Y \to \mathbb{R}\}$ von Halbnormen erzeugt werden. Es sei f eine lineare Abbildung von X in Y. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Entweder ist f überall stetig oder nirgends.*

2. *Die Abbildung f ist stetig genau dann, wenn zu jedem $q_l \in \mathcal{Q}$ ein $p_j \in \mathcal{P}$ und eine positive relle Zahl a existieren mit*

$$q_l(f(x)) \leq a p_j(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Beweis. Die erste Aussage ist schon durch den Beweis zu Theorem 8.11 gezeigt. Wenden wir uns dem Beweis der zweiten Aussage zu. Es seien zuerst die obigen Ungleichungen erfüllt. Zu einer vorgegebenen Umgebung W in Y gibt es ein $W_{l,\varepsilon}$ der Umgebungsbasis $\mathcal{W}$ in Y mit $W_{l,\varepsilon} \subset W$. Der zugehörigen Halbnorm q_l, $l \in L$ entspricht nach Voraussetzung eine Halbnorm p_j und eine positive reelle Zahl a. Mit diesem p_j bilden wir $V_{j,\frac{\varepsilon}{a}}$, ein Element der Umgebungsbasis $\mathcal{V}$ in X. Man zeigt dann sofort

$$f(V_{j,\frac{\varepsilon}{a}}) \subset W_{l,\varepsilon} \subset W, \text{ d.h. } f \text{ ist stetig in } x = 0.$$

Wir setzen jetzt die Stetigkeit von f in $x = 0$ voraus. Zu jedem $W_{l,\varepsilon} \in \mathcal{W}$ existiert ein $V_{j,\delta} \in \mathcal{V}$ mit $f(V_{j,\delta}) \subset W_{l,\varepsilon}$, bzw. mit anderen Worten: Aus $p_j(x) < \delta$ folgt $q_l(f(x)) < \varepsilon$. Es sei jetzt $x \in X$ beliebig gewählt:

1.Fall: Es ist $p_j(x) = \beta > 0$. Dann wählen wir ein $\tilde{\delta} \in (0, \delta)$. Es gilt dann $p_j(\frac{\tilde{\delta}}{\beta}x) < \delta$ bzw.

$$q_l\Big(f\Big(\frac{\tilde{\delta}}{\beta}x\Big)\Big) < \varepsilon \quad \text{oder} \quad q_l(f(x)) < \frac{\varepsilon}{\tilde{\delta}}p_j(x).$$

Setzen wir $a := \frac{\varepsilon}{\tilde{\delta}}$, so ergibt sich die gewünschte Ungleichung.

2.Fall: Es ist $p_j(x) = 0$. Mit der Homogenitätseigenschaft von Halbnormen erhalten wir $p_j(\alpha x) = 0 < \delta$ für beliebiges $\alpha > 0$. Damit folgt $q_l(f(\alpha x)) = \alpha q_l(f(x)) < \varepsilon$, also $q_l(f(x)) = 0$. Somit ist die gewünschte Ungleichung mit dem obigen a erfüllt. □

Dieser Satz liefert sofort eine bedeutende Folgerung für lineare Funktionale.

Theorem 8.16. *Es sei X ein topologischer Vektorraum über den Körper K, dessen Topologie durch ein filtrierendes System $\mathcal{P} = \{p_j : j \in J\}$ von Halbnormen erzeugt wird. Es sei f ein lineares Funktional auf X. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Entweder ist f überall stetig oder nirgends.*

2. *Das Funktional f ist stetig genau dann, wenn eine Halbnorm $p_j \in \mathcal{P}$ und eine positive relle Zahl a existieren mit*

$$|f(x)| \leq a p_j(x) \text{ für alle } x \in X.$$

8.5 Die Topologie im Raum $C_0^\infty(G)$

Wir wenden die in den vorhergehenden Abschnitten kennengelernten Begriffe zum Verständnis der Funktionenräume $C^\infty(K)$, $D(K)$, $C^m(G)$, $C^\infty(G)$, $C_0^\infty(G)$ aus Abschnitt 8.1 an.

8.5.1 Beispiele für metrisierbare Räume

$C^\infty(K)$: Die Topologie wird durch das filtrierende System $\mathcal{P} = \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Halbnormen (sogar Normen, vgl. mit Abschnitt 8.1.1) erzeugt. Dieses System ist abzählbar. Damit ergeben sich sofort die Eigenschaften lokalkonvex, erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, metrisierbar und separiert.

$D(K)$: Als Teilraum von $C^\infty(K)$ wird die Topologie durch das gleiche System von Halbnormen erzeugt. Damit ergeben sich die gleichen Eigenschaften wie für den $C^\infty(K)$.

$C^m(G)$: Es sei $\mathcal{P}$ das System aller Halbnormen $p_{K,m}$, wobei K eine beliebige kompakte Menge aus G ist. Dann gilt natürlich $p_{K_1,m} \leq p_{K_2,m}$, falls $K_1 \subset K_2$ erfüllt ist. Somit ist das System $\mathcal{P}$ filtrierend. Der lineare Raum $C^m(G)$ besitzt die Eigenschaften lokalkonvex, erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, metrisierbar und separiert. Um eine Umgebungsbasis $\mathcal{V}^*$ zu erhalten, wählen wir wie in Definition 2.1 eine Folge $\{K_j\}_j$ regulär kompakter Mengen, die das vorgelegte Gebiet G monoton ausschöpft. Es sei dann $\mathcal{V}^*$ das System aller Mengen

$$V^*_{j,m,l} = \Big\{u \in C^m(G) : p_{K_j,m}(u) < \frac{1}{l}\Big\}, \; j, l \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir wählen das Mengensystem $\mathcal{V}$, welches aus allen Mengen der Form

$$V_{K,m,\varepsilon} = \{u \in C^m(G) : p_{K,m}(u) < \varepsilon\},\ K \subset G,\ \varepsilon > 0$$

besteht. Dann sind damit alle Voraussetzungen von Theorem 8.12 erfüllt. Die geforderten Eigenschaften des Raumes $C^m(G)$ beweist man leicht. Damit $\mathcal{V}^*$ eine Umgebungsbasis in $\mathcal{V}$ ist, hat man nur zu zeigen, daß zu jedem $V_{K,m,\varepsilon}$ ein $V^*_{j,m,l}$ mit $V^*_{j,m,l} \subset V_{K,m,\varepsilon}$ existiert. □

$C^\infty(G)$: Es sei $\mathcal{P}$ das System aller Halbnormen $p_{K,m}$, wobei K eine beliebige kompakte Menge aus G und m eine beliebige natürliche Zahl sind. Dann gilt natürlich $p_{K_1,m_1} \le p_{K_2,m_2}$, falls $K_1 \subset K_2$ und $m_1 \le m_2$ erfüllt sind. Somit ist das System $\mathcal{P}$ filtrierend. Der lineare Raum $C^\infty(G)$ besitzt die Eigenschaften lokalkonvex, erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, metrisierbar und separiert. Um eine Umgebungsbasis $\mathcal{V}^*$ zu erhalten, wählen wir wie in Definition 2.1 eine Folge $\{K_j\}_j$ regulär kompakter Mengen, die das vorgelegte Gebiet G monoton ausschöpft. Es sei dann $\mathcal{V}^*$ das System aller Mengen

$$V^*_{j,l} = \Big\{u \in C^\infty(G) : p_{K_j,j}(u) < \frac{1}{l}\Big\},\ j,l \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir wählen das Mengensystem $\mathcal{V}$, welches aus allen Mengen der Form

$$V_{K,m,\varepsilon} = \{u \in C^\infty(G) : p_{K,m}(u) < \varepsilon\},\ K \subset G,\ \varepsilon > 0$$

besteht. Dann sind damit alle Voraussetzungen von Theorem 8.12 erfüllt. Die geforderten Eigenschaften des Raumes $C^\infty(G)$ beweist man leicht. Damit $\mathcal{V}^*$ eine Umgebungsbasis in $\mathcal{V}$ ist, hat man nur zu zeigen, daß zu jedem $V_{K,m,\varepsilon}$ ein $V^*_{j,l}$ mit $V^*_{j,l} \subset V_{K,m,\varepsilon}$ existiert. □

8.5.2 Der Raum $C_0^\infty(G)$

Ausgangspunkt unserer Überlegungen sind die Räume $D(K)$ aus dem vorigen Abschnitt. Falls $K_1 \subset K_2$, dann ist $D(K_1)$ Untervektorraum von $D(K_2)$. Für beide Räume kennen wir die Umgebungsbasen

$$\mathcal{V}_1 = \{V_{K_1,m,\varepsilon} = \{u \in D(K_1) : p_{K_1,m}(u) < \varepsilon\}\},$$
$$\mathcal{V}_2 = \{V_{K_2,m,\varepsilon} = \{u \in D(K_2) : p_{K_2,m}(u) < \varepsilon\}\},\ m \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0.$$

Andererseits wird in dem Untervektorraum $D(K_1)$ durch $D(K_2)$ eine Topologie mit der Umgebungsbasis $\mathcal{V}_1^* = \{V_{K_2,m,\varepsilon} \cap D(K_1)\}$ induziert.

Theorem 8.17. *Die Umgebungsbasen $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_1^*$ in $D(K_1)$ sind äquivalent, folglich sind die hiermit definierten Topologien gleich.*

In Definition 8.5 haben wir den Raum $C_0^\infty(G)$ definiert. Kommen wir darauf zurück. Für alle Kompakta $K \subset G$ betrachten wir $D(K)$ und schreiben $C_0^\infty(G) := \cup_{K\subset G} D(K)$. Unsere Aufgabe besteht jetzt darin, eine Topologie in $C_0^\infty(G)$ einzuführen.

Man könnte auf folgende Idee kommen: Der Vektorraum $C_0^\infty(G)$ ist enthalten in $C^\infty(G)$. Also könnte man die induzierte Topologie von $C^\infty(G)$ auf $C_0^\infty(G)$ verwenden. Diese Topologie ist aber zu schwach wie das folgende Beispiel zeigt: Zu einem vorgelegten $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ definieren wir die Folge $\{u_k\}_k$ aus $C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $u_k := \frac{1}{k}u(\frac{x}{k})$. Diese Folge hat keine gemeinsame kompakte Obermenge, also liefert die Topologie (vom $C^\infty(\mathbb{R})$ induziert) kein Grenzelement aus $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Es gilt aber $u_k \to 0$ in der Topologie des $C^\infty(\mathbb{R})$.

Also benötigen wir eine andere (Null)Umgebungsbasis in $C_0^\infty(G)$. Diese sollte so beschaffen sein, daß sich als Konvergenz von Folgen notwendigerweise die des $C^\infty(G)$ zusammen mit der Trägerbedingung ergibt.

Definition 8.13. *Es sei $\mathcal{V}^*$ die Familie aller Teilmengen $V \in C_0^\infty(G)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *Jedes $V \in \mathcal{V}^*$ ist kreisförmig, absorbierend und konvex.*
2. *Für alle $K \subset G$ und $V \in \mathcal{V}^*$ ist $V \cap D(K)$ eine (Null)Umgebung in $D(K)$.*

Mit dieser Familie von Teilmengen gilt der folgende Satz.

Theorem 8.18. *Der Vektorraum $C_0^\infty(G)$ wird mittels $\mathcal{V}^*$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum über den Körper $\mathbb{C}$ mit der (Null)Umgebungsbasis $\mathcal{V}^*$.*

Beweis. Offensichtlich gehört jeder Raum $D(K)$ zu $\mathcal{V}^*$, da $\mathcal{V}^*$ alle Mengen $V_{K,m,R}$ mit beliebigem positiven R enthält. Damit ist $\mathcal{V}^*$ nicht leer. Wir werden die Voraussetzungen von Theorem 8.9 überprüfen. Die erste Voraussetzung von Theorem 8.9 ist auch hier vorausgesetzt. Zusätzlich setzen wir die Konvexität voraus. Wenn wir die zweite und dritte Voraussetzung überprüfen können, dann ergibt sich sofort die Aussage des Theorems. Wenden wir uns der zweiten Voraussetzung zu.

Wir zeigen die folgende schärfere Aussage: Falls V_1, $V_2 \in \mathcal{V}^*$, dann ist auch $V_3 := V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}^*$.

Man zeigt sofort, daß V_3 kreisförmig, absorbierend und konvex ist. Da nun $V_1 \cap D(K)$ und $V_2 \cap D(K)$ (Null)Umgebungen in $D(K)$ darstellen und der Schnitt dieser Umgebungen wieder eine (Null)Umgebung darstellt, folgt mit $V_3 \cap D(K) = (V_1 \cap D(K)) \cap (V_2 \cap D(K))$ sofort $V_3 \in \mathcal{V}^*$.

Wenden wir uns jetzt der dritten Vorausetzung zu.

Wir zeigen die folgende schärfere Aussage: Falls $V \in \mathcal{V}^*$ gegeben ist, dann gilt mit $V_1 = \frac{1}{2}V \in \mathcal{V}^*$ sofort $V_1 + V_1 \subset V$.

Offensichtlich ist V_1 kreisförmig, absorbierend und konvex. Mit $D(K) = \frac{1}{2}D(K)$ gilt $V_1 \cap D(K) = \frac{1}{2}(V \cap D(K))$. Da auf der rechten Seite eine (Null)Umgebung steht, ist auch auf der linken Seite eine solche. Damit gehört V_1 zu $\mathcal{V}^*$. Wegen der Konvexität von V gilt $V_1 + V_1 \subset V$. □

Mit Hilfe dieses Satzes können wir allgemeine Umgebungen in $D(K)$ charakterisieren.

Theorem 8.19. *Es sei U eine Umgebung von u in $C_0^\infty(G)$ und $u \in D(K)$. Dann ist $U \cap D(K)$ eine Umgebung von u in $D(K)$.*

Beweis. Ist U eine Umgebung von u in $C_0^\infty(G)$, dann existiert nach Theorem 8.18 eine Nullumgebung $V \in \mathcal{V}^*$ mit $V + u \subset U$. Man kann dann zeigen, daß die Beziehung $(V + u) \cap D(K) = (V \cap D(K)) + u$ erfüllt ist. Da offensichtlich auf der rechten Seite eine Umgebung von u steht, ist auch die linke Seite eine solche. Da $U \cap D(K)$ eine Obermenge zu $(V + u) \cap D(K)$ ist, folgt die Aussage des Theorems. □

Aufgabe 24: Zeigen Sie die Beziehung $(V + u) \cap D(K) = (V \cap D(K)) + u$.

Theorem 8.20. *Ist M eine offene Teilmenge von $C_0^\infty(G)$, so ist für jedes $K \subset G$ der Durchschnitt $M \cap D(K)$ offen in $D(K)$.*

Beweis. Wir setzen voraus, daß $M \cap D(K)$ nicht leer ist. Für $u \in M \cap D(K)$ gilt $u \in M$. Da M offen ist in $C_0^\infty(G)$, muß M eine Umgebung von u in $C_0^\infty(G)$ sein. Nach Theorem 8.19 ist $M \cap D(K)$ eine Umgebung von u in $D(K)$. Da u beliebig gewählt wurde, ist $M \cap D(K)$ eine Umgebung jedes seiner Punkte, also offen in $D(K)$. □

Wir kommen jetzt zum Hauptresultat dieses Abschnittes. Dieses charakterisiert die Konvergenz von Folgen $\{u_l\}_l$ in $C_0^\infty(G)$. Wir erhalten als Konvergenz die induzierte des $C^\infty(G)$ zusammen mit der Trägerbedingung.

Theorem 8.21. *Eine Folge $\{u_l\}_l$ in $C_0^\infty(G)$ konvergiert gegen 0 in $C_0^\infty(G)$ genau dann, wenn die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:*

1. *Es existiert eine kompakte Menge $K \subset G$ mit $\operatorname{supp} u_l \subset K$ für alle $l \in \mathbb{N}$.*
2. *Für alle Multiindizes α strebt $D_x^\alpha u_l$ gegen 0 in $C(K)$.*

Beweis. Es seien die beiden Eigenschaften erfüllt. Dann konvergiert die Folge $\{u_l\}_l$ in $C_0^\infty(G)$ gegen 0.

Nach Wahl einer beliebigen (Null)Umgebung U in $C_0^\infty(G)$ läßt sich ein $V \in \mathcal{V}^*$ so wählen, daß $V \subset U$ und $V \cap D(K)$ eine (Null)Umgebung in $D(K)$ ist. Folglich existiert ein $V_{K,m,\varepsilon}$ der Umgebungsbasis in $D(K)$ mit $V_{K,m,\varepsilon} \subset (V \cap D(K)) \subset U$. Nach der ersten und zweiten Eigenschaft ist $u_l \in V_{K,m,\varepsilon}$ für alle $l \geq l_0(K,m,\varepsilon)$. Damit ist $u_l \in U$ für alle $l \geq l_0(K,m,\varepsilon)$.

Es konvergiert die Folge $\{u_l\}_l$ in $C_0^\infty(G)$ gegen 0. Dann erfüllt die Folge die beiden Eigenschaften.

Wir führen den Beweis indirekt. Zu vorgegebenen $K \subset G$ existiert ein u_l, $l = l(K)$, mit $\operatorname{supp} u_l \notin K$. Wir wählen eine Folge $\{K_j\}_j$ kompakter Mengen aus G, die das Gebiet G monoton ausschöpft. Zu K_1 gibt es ein l_1 mit $\operatorname{supp} u_{l_1} \not\subset K_1$ und daher einen Punkt $x_1 \notin K_1$ mit $u_{l_1}(x_1) \neq 0$. Dann liegt x_1 in $K_{j_1} \setminus K_1$. Zu K_{j_1} gibt es ein $l_2 > l_1$ mit $\operatorname{supp} u_{l_2} \not\subset K_{j_1}$. Es existiert dann ein K_{j_2}, $j_2 > j_1$, mit $x_2 \in K_{j_2} \setminus K_{j_1}$ und $u_{l_2}(x_2) \neq 0$. Man kann diese Überlegungen weiterführen und gelangt zu Folgen $\{u_{l_n}\}$ und $\{x_n\}$ mit $x_n \in K_{j_n} \setminus K_{j_{n-1}}$ und $u_{l_n}(x_n) \neq 0$. Mit diesen Folgen setzen wir

$$q(u) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in K_{j_n} \setminus K_{j_{n-1}}} \frac{|u(x)|}{|u_{l_n}(x_n)|}.$$

Für jedes $u \in C_0^\infty(G)$ stellt $q(u)$ eine endliche Summe dar. Weiterhin ist $q(u)$ eine Halbnorm und die Menge $V = \{u \in C_0^\infty(G) : q(u) < 1\}$ ist kreisförmig, absorbierend und konvex.

Mit einem vorgelegten $K \subset G$ gilt $K \subset K_{j_n}$ und $V_{K,0,R} \subset V \cap D(K)$ mit $R^{-1} = 2 \sum_{m=1}^{n} |u_{l_m}(x_m)|^{-1}$. Folglich enthält $V \cap D(K)$ die Umgebung $V_{K,0,R}$ in $D(K)$, ist also selbst Umgebung in $D(K)$. Damit ist $V \in \mathcal{V}^*$.

Nach Voraussetzung existiert ein $l_0(V)$ so, daß $u_l \in V$ für $l \geq l_0$. Andererseits gilt

$$q(u_{l_n}) \geq 2 \sup_{x \in K_{j_n} \setminus K_{j_{n-1}}} \frac{|u_{l_n}(x)|}{|u_{l_n}(x_n)|} \geq 2,$$

also $u_l \notin V$ für $l \geq l_0$. Damit ist die Annahme falsch und es *existiert eine kompakte Menge $K \subset G$ mit $\operatorname{supp} u_l \subset G$ für alle $l \in \mathbb{N}$.*

Mit diesem K sei eine Umgebung $V_{K,m,\varepsilon}$ in $D(K)$ gebildet. Wir definieren

$$V' = \{u \in C_0^\infty(G) : \sup_{x \in G, |\alpha| \leq m} |D_x^\alpha u(x)| < \varepsilon\}.$$

Diese Menge ist kreisförmig, absorbierend und konvex. Die Menge $V' \cap D(K)$ ist eine (Null)Umgebung in $D(K)$. Folglich ist $V' \in \mathcal{V}^*$ und $V' \cap D(K) = V_{K,m,\varepsilon}$. Nach Voraussetung und der schon bewiesenen ersten Eigenschaft existiert ein $l_0 = l_0(K,m,\varepsilon)$ mit $u_l \in V_{K,m,\varepsilon}$ für $l \geq l_0$. Damit ist auch die zweite Eigenschaft bewiesen. □

Die folgende Aussage erhalten wir sofort als Folgerung.

Theorem 8.22. *Eine Folge $\{u_l\}_l$ in $C_0^\infty(G)$ konvergiert gegen u in $C_0^\infty(G)$ genau dann, wenn die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:*

1. *Es existiert eine kompakte Menge $K \subset G$ mit $\operatorname{supp} u_l$, $\operatorname{supp} u \subset K$ für alle $l \in \mathbb{N}$.*
2. *Für alle Multiindizes α strebt $D_x^\alpha u_l$ gegen $D_x^\alpha u$ in $C(K)$.*

Die Vollständigkeit des Raumes $D(K)$ ist einfach zu zeigen. Mit deren Hilfe läßt sich die folgende Aussage beweisen.

Theorem 8.23. *Der Raum $C_0^\infty(G)$ ist vollständig.*

Zwischen den Topologien der Räume $C_0^\infty(G)$ und $C^\infty(G)$ besteht ein Zusammenhang, der im folgenden Theorem beschrieben wird.

Theorem 8.24. *Aus der Konvergenz einer Folge $\{u_l\}_l$ gegen 0 in $C_0^\infty(G)$ folgt die Konvergenz dieser Folge gegen 0 in $C^\infty(G)$, aber nicht umgekehrt.*

Dieser Sachverhalt wird auch häufig damit beschrieben, daß die Topologie in $C_0^\infty(G)$ stärker ist als die in $C^\infty(G)$.

Theorem 8.25. *Zu vorgegebenem $u \in C^\infty(G)$ existiert eine Folge $\{u_l\}_l$ aus $C_0^\infty(G)$, die gegen u in der Topologie des $C^\infty(G)$ konvergiert. Damit ist $C_0^\infty(G)$ dicht in $C^\infty(G)$.*

Aufgabe 25: Beweisen Sie die beiden letzten Sätze.

8.6 Funktionalanalytische Eigenschaften von Räumen von Distributionen

Wir wollen zum Abschluß der Vorlesung noch einige Eigenschaften von Distributionen kennenlernen. Wie zu Beginn der Vorlesung bezeichnen wir Distributionen mit u und Testfunktionen mit ϕ.

8.6.1 Zum Begriff der Ordnung einer Distribution

Wir kommem zuerst auf Definition 2.3 zurück. Distributionen lassen sich mit den eingeführten Halbnormen wie folgt charakterisieren:

Theorem 8.26. *Es sei $u : C_0^\infty(G) \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional. Dann ist u stetig genau dann, wenn zu jedem Kompaktum $K \subset G$ eine nichtnegative Zahl c und ein $l \in \mathbb{N}$ so existieren, daß*

$$|u(\phi)| \leq c\, p_{K,l}(\phi) \quad \textit{für alle } \phi \in D(K) \textit{ gilt.}$$

Die Zahlen c und l hängen im allgemeinen von K ab.

Mit Hilfe der Abschätzungen aus Theorem 8.26 läßt sich der Begriff der *Ordnung einer Distribution* definieren.

Definition 8.14. *Unter der Ordnung von $u \in D'(G)$ auf $K \subset G$ versteht man die kleinste Zahl $l_0 \in \mathbb{N}$, für welche die Abschätzung aus Theorem 8.26 für alle $\phi \in D(K)$ erfüllt ist. Die Distribution $u \in D'(G)$ heißt von endlicher Ordnung auf G, wenn es ein $l \in \mathbb{N}$ gibt, so daß die für alle $K \subset G$ die Ordnung nicht größer als l ist. Es existiert dann ein minimales l_0, welches als Ordnung von u auf G bezeichnet wird.*

Beispiele. 1. Für $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ setzen wir $u : \phi \to \sum\limits_{k=0}^{l} \phi^{(k)}(t_0)$. Dann beträgt die Ordnung von u gleich l.

2. Für $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ setzen wir $u : \phi \to \sum\limits_{k=0}^{\infty} \phi^{(k)}(k)$. Dann ist u nicht von endlicher Ordnung. Auf jedem Kompaktum ist aber u natürlich von endlicher Ordnung. Wie groß ist diese in Abhängigkeit vom Kompaktum K?

3. Für $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ setzen wir

$$u : \phi \to \lim_{l\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{l} \phi(1/k) - l\phi(0) - (\log l)\phi'(0)\Big).$$

Ist u eine Distribution? Wenn ja, ist u von endlicher Ordnung?

Es sollte klar sein, daß die Distributionen mit kompakten Träger $\mathcal{E}'(G)$ (siehe auch Definition 3.1) von endlicher Ordnung sind. Der Raum $\mathcal{E}'(G)$ ist der Raum der stetigen Funktionale auf $C^\infty(G)$. Kann man sich vorstellen, daß jedes Funktional auf $C^\infty(G)$ einen kompakten Träger besitzen muß? Welche der obigen Beispiele stellt eine Distribution aus $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ dar?

8.6.2 Beziehung zu stetigen Funktionen

Wir haben gesehen, daß sich Distributionen beliebig oft differenzieren lassen. Da stetige Funktionen reguläre Distributionen sind, sind diese unendlich oft im Distributionensinne differenzierbar. Wir werden jetzt zeigen, daß umgekehrt jede Distribution, im allgemeinen aber nur lokal, als Ableitung einer gewissen Ordnung aus der der stetigen Funktion zugeordneten regulären Distribution gewonnen werden kann.

Theorem 8.27. *Es sei $u \in D'(G)$ und K eine regulär kompakte Menge aus G. Dann gibt es einen Multiindex α sowie eine stetige Funktion F mit kompakten Träger in einer beliebig kleinen Umgebung $U \subset G$ von K so, daß $u = \partial_x^\alpha F$ auf $C_0^\infty(int\, K)$ erfüllt ist, d.h. $u(\phi) = \partial_x^\alpha F(\phi)$ für alle $\phi \in C_0^\infty(int\, K)$. Hier bezeichnet $int\, K$ das Innere von K.*

Beweis. Der Beweis wird in drei Schritten geführt.
Schritt 1: Wir zeigen die folgende Ungleichung:

$$\sup_{x\in K} |\partial_x^\beta \phi(x)| \le c^{nl} \sup_{x\in K} |\partial_x^{(l,l,\cdots,l,l)} \phi(x)| \text{ für alle } \phi \in C_0^\infty(int\, K) \text{ und } |\beta| \le nl.$$

Es werde die regulär kompakte Menge K in einen achsenparallelen Würfel mit dem Ursprung als Mittelpunkt und der Kantenlänge $c' \ge 1$ eingeschlossen und eine Funktion $\psi \in D(K)$ gewählt. Ist jetzt $x \in K$ und $\xi \in \partial K$ oder außerhalb K, aber in Q gewählt, so ergibt sich mit Hilfe des Mittelwertsatzes und $\psi(\xi) = 0$ mit einem $\theta \in (0,1)$ die Beziehung
$\psi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j \psi(\xi + \theta(x-\xi))(x_j - \xi_j)$. Hieraus folgt unmittelbar
$\sup_{x\in K} |\psi(x)| \le c \sup_{x\in K,\,|\beta|=1} |\partial_x^\beta \psi(x)|$ mit $c := nc'$. Wählen wir jetzt $\phi \in C_0^\infty(\mathrm{int}\, K)$, so ist $\psi = \partial_x^\beta \phi \in C_0^\infty(\mathrm{int}\, K)$ bei beliebigem β. Es gilt somit $\sup_{x\in K} |\partial_x^\beta \psi(x)| \le c^{|\alpha|} \sup_{x\in K,\,|\beta|=1} |\partial_x^{\beta+\alpha} \psi(x)|$ für einen beliebigen Multiindex α. Zu einem Multiindex β wählen wir ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l \ge \beta_j$. Wir setzen schließlich $\alpha = (l-\beta_1, l-\beta_2, \cdots, l-\beta_{n-1}, l-\beta_n)$ und bekommen

$$|\partial_x^\beta \phi(x)| \le c^{nl-|\beta|} \sup_{x\in K} |\partial_x^{(l,l,\cdots,l,l)} \phi(x)|.$$

Das liefert sofort die gewünschte Aussage des 1.Schrittes.

Schritt 2: Wir zeigen die folgende Ungleichung:

$$|u(\phi)| \leq c_0 \int_K |\partial_x^{(l+1,l+1,\cdots,l+1,l+1)}\phi(x)|dx,\ c_0 := ac^{nl},\ \textit{für alle}\ \phi \in C_0^\infty(\mathit{int}\,K).$$

Nach Theorem 8.16 gibt es zu K eine nichtnegative Zahl a und ein $l \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $\phi \in D(K)$ die Abschätzung $|u(\phi)| \leq ap_{K,l}(\phi)$ gilt. Benutzen wir die Ungleichung aus dem ersten Schritt, dann folgt $|u(\phi)| \leq ac^{nl}\sup_{x\in K}|\partial_x^{(l,l,\cdots,l,l)}\phi(x)|$ für alle $\phi \in D(K)$. Nutzen wir schließlich $\partial_x^{(l,l,\cdots,l,l)}\phi(x) = \int_{-\infty}^x \partial_\xi^{(l+1,l+1,\cdots,l+1,l+1)}\phi(\xi)d\xi$, dann ergibt sich sofort die gewünschte Abschätzung.

Schritt 3: Wir schlußfolgern die gewünschte Aussage.

Mit einem beliebigen $l \in \mathbb{N}$ sei $C_{0,l}^\infty(\mathrm{int}\,K) = \{\chi = (-1)^{nl}\partial_x^{(l,l,\cdots,l,l)}\phi(x)\}$. Das ist ein linearer Teilraum des $L_1(\mathrm{int}\,K)$. Für $\chi \in C_{0,l}^\infty(\mathrm{int}\,K)$ setzen wir $S(\chi) = S((-1)^{ln}\partial_x^{(l,l,\cdots,l,l)}\phi) =: u(\phi)$. Für diese lineare Abbildung erhalten wir mit der Ungleichung aus dem zweiten Schritt (wir schreiben jetzt l anstelle von $l+1$) $|S(\chi)| = |u(\phi)| \leq c_0\|\partial_x^{(l,l,\cdots,l,l)}\phi\|_{L_1(\mathrm{int}\,K)} = c_0\|\chi\|_{L_1(\mathrm{int}\,K)}$. Somit ist S ein stetiges Funktional auf $C_{0,l}^\infty(\mathrm{int}\,K)$ und läßt sich nach dem Hahn-Banach Theorem zu einem linearen stetigen Funktional auf ganz $L_1(\mathrm{int}\,K)$ fortsetzen. Da das Dual zum $L_1(G)$ der Raum $L_\infty(G)$ ist, G sei hier ein beliebiges Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, ergibt sich

$$u(\phi) = S(\chi) = \int_K f(x)\chi(x)dx = f(\chi) = (-1)^{nl}f(\partial_x^{(l,l,\cdots,l,l)}\phi) = \partial_x^{(l,l,\cdots,l,l)}f(\phi),$$
$$\text{d.h. } u = \partial_x^{(l,l,\cdots,l,l)}f \text{ auf } C_0^\infty(\mathrm{int}\,K).$$

Definieren wir $G(x) := \int_{-\infty}^x f(\xi)d\xi$, so ist $G \in C(\mathbb{R}^n)$ und $\partial_x^{(1,1,\cdots,1,1)}G = f$ auf $C_0^\infty(\mathrm{int}\,K)$. Somit ist $u = \partial_x^{(l+1,l+1,\cdots,l+1,l+1)}G$ auf $C_0^\infty(\mathrm{int}\,K)$. Mit einer Funktion $\eta = \eta(x)$ aus $C_0^\infty(G)$, die identisch 1 auf K ist und ihren Träger in einer beliebig kleinen Umgebung U von K besitzt, gilt $G = \eta G$ auf K, also erhalten wir schließlich mit $F := \eta G$ die gewünschte Beziehung $u = \partial_x^{(l+1,l+1,\cdots,l+1,l+1)}F$ auf $C_0^\infty(\mathrm{int}\,K)$. □

Man kann im allgemeinen nicht erwarten, daß eine Distribution global als Ableitung einer stetigen Funktion darstellbar ist. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel. Die Distribution $u = \sum_{k=0}^\infty \delta^{(k)}(x-k)$ von unendlicher Ordnung kann auf $\mathbb{R}$ nicht global als Ableitung einer regulären Distribution, die von einer stetigen Funktion erzeugt wird, dargestellt werden. Benutzen wir die Heaviside-Funktion $H = H(x)$, dann gilt für $k, l \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$d_x^{l+1}\Big(\frac{(x-k)^{l-k}}{(l-k)!}H(x-k)\Big) = d_x^{k+1}H(x-k) = \delta^{(k)}(x-k).$$

Setzen wir

$$F_l(x) := \sum_{k=0}^{l}\frac{(x-k)^{l+1-k}}{(l+1-k)!}H(x-k),$$

so ist $F_l \in C(\mathbb{R})$. Weiterhin gilt $d_x^{l+2}F_l = \sum_{k=0}^l \delta^{(k)}(x-k)$ auf $(-(k+1), k+1)$. Die rechte Seite liefert für $l \to \infty$ die vorgelegte Distribution, die Differentiationsordnung der linken Seite übersteigt aber jede Schranke.

Falls wir eine Distribution mit kompaktem Träger gegeben haben, dann erwartet man nach Theorem 8.27 eine globale Darstellung der Distribution mit Hilfe von stetigen Funktionen. Daß das tatsächlich so ist, zeigt die folgende Aussage.

Theorem 8.28. *Es sei $u \in \mathcal{E}'(G)$. Dann existiert ein Multiindex α und stetige Funktionen F_β, $\beta \leq \alpha$, mit $u = \sum_{\beta\leq\alpha} \partial_x^\beta F_\beta$, d.h. im Sinne von Abschnitt 3.1 gilt $u(\phi) = \sum_{\beta\leq\alpha} \partial_x^\beta F_\beta(\phi)$ für alle $\phi \in C_0^\infty(G)$ mit den von F_β erzeugten regulären Distributionen F_β. Die F_β sind nicht eindeutig bestimmt, die Träger von F_β liegen in einer hinreichend kleinen Umgebung U von $\operatorname{supp} u$.*

Beweis. Nach Theorem 8.27 gilt $u = \partial_x^\alpha F$ für jede Menge $\tilde{G}$ mit $\operatorname{supp} u = K \subset \tilde{G} \subset \overline{\tilde{G}} \subset U$. Ist also $\psi \in C_0^\infty(\tilde{G})$ dann gilt $u(\psi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\tilde{G}} F(x)\partial_x^\alpha \psi(x)dx$. Es sei $\chi \in C_0^\infty(\tilde{G})$ mit $\chi \equiv 1$ auf einer Umgebung von K. Für $\phi \in C_0^\infty(G)$ ist natürlich $\chi\phi \in C_0^\infty(\tilde{G})$. Wir erhalten

$$u(\phi) = u(\chi\phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\tilde{G}} F(x)\partial_x^\alpha(\chi\phi)dx = (-1)^{|\alpha|} \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \int_{\tilde{G}} F(x)\partial_x^{\alpha-\beta}\chi\partial_x^\beta\phi dx.$$

Daraus folgt aber sofort

$$u = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial_x^\beta\Big(F(x)\partial_x^{\alpha-\beta}\chi\Big) \text{ auf } G.$$

□

8.6.3 Zur Dualitätstheorie

Es seien X und Y lokalkonvexe topologische Vektorräume. Der Umgebungsbasis $\{M_j\}_{j\in J}$ von absorbierenden, kreisförmigen und konvexen (Null)Umgebungen in Y läßt sich ein System von Seminormen $\{p_{M_j}(\cdot)\}_{j\in J}$ wie folgt zuordnen:

$$p_{M_j}(y) = \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : a^{-1}y \in M_j\}.$$

Es sei jetzt eine lineare Abbildung $f : X \to Y$ vorgelegt. Dann lassen sich auf der Menge $L(X \to Y)$ der stetigen linearen Abbildungen $f : X \to Y$ die folgenden beiden Konvergenzarten definieren.

Definition 8.15.

1. *Die Folge $\{f_n\}_n$ konvergiert schwach gegen f, falls für alle $x \in X$ die Folge $\{f_n(x)\}_n$ in Y gegen $f(x)$ konvergiert. Mit $L_w(X \to Y)$ bezeichnen wir den lokalkonvexen Raum mit der Topologie der schwachen Konvergenz, also mit dem System von Seminormen $f \to p_{M_j}(f(x))$.*

2. *Die Folge $\{f_n\}_n$ konvergiert stark gegen f, falls sie auf beschränkten Teilmengen von X gleichmäßig konvergiert, d.h. auf allen Mengen $B \subset X$ mit $p_{U_l}(x) \leq C_l$ für alle $x \in B$ und alle $l \in L$. Dabei bezeichnet p_{U_l}, $l \in L$, das System von Seminormen auf X. Mit $L_s(X \to Y)$ bezeichnen wir den lokalkonvexen Raum mit der Topologie der starken Konvergenz, also mit dem System von Seminormen $f \to \sup_{x\in B} p_{M_j}(f(x))$ für alle beschränkten Mengen $B \subset X$.*

Offenbar impliziert die starke Konvergenz die schwache, aber i.allg. nicht umgekehrt. Wir werden aber zeigen, daß $L_w(C_0^\infty(G), \mathbb{C}) \sim L_s(C_0^\infty(G), \mathbb{C})$ gilt, d.h. daß im Raum der Distributionen die schwache mit der starken Konvergenz übereinstimmen. Dazu erinnern wir an ein Kriterium für die Beschränktheit von Mengen in $C_0^\infty(G)$.

Theorem 8.29. *Eine Teilmenge $B \subset C_0^\infty(G)$ ist beschränkt genau dann, wenn es eine kompakte Menge $K \subset G$ mit $B \subset D(K)$ gibt, und wenn B beschränkt in $D(K)$ ist.*

Beweis. Die Rückrichtung ist wegen der Stetigkeit der Einbettung von $D(K)$ in $C_0^\infty(G)$ klar.
Sei also B beschränkt aus $C_0^\infty(G)$. Angenommen es existiert eine Folge von Punkten $\{x_j\}_j$ aus G ohne Häufungspunkt in G und eine Folge $\{\phi_j\}_j$ aus B mit $\phi_j(x_j) \neq 0$. Dann setzen wir

$$p(\phi) = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{|\phi(x_j)|}{|\phi_j(x_j)|}.$$

Dann ist $p(\phi)$ auf jedem $D(K)$ eine stetige Seminorm, da nur endlich viele x_j in K liegen. Da $C_0^\infty(G)$ nach Definition 8.5 der induktive Limes der Räume $D(K)$ ist, ergibt sich p als Seminorm auf $C_0^\infty(G)$. Da nun aber $p(\phi_j) \geq j$ ist, ist p auf der Menge B nicht beschränkt. Somit kann B selbst nicht beschränkt sein im Widerspruch zur Annahme. □

Zum Beweis unseres Hauptsatzes der Äquivalenz der Konvergenzarten aus Definition 8.15 benötigen wir eine schwache Formulierung des aus der Funktionalanalysis bekannten Satzes von Banach-Steinhaus.

Theorem 8.30. Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit
Seien X ein topologischer Vektorraum von zweiter Kategorie, für unsere Belange reicht ein induktiver Limes einer Folge von Frecheträumen, und Y ein lokalkonvexer metrischer Raum. Sei weiter $\{f_j : X \to Y\}_{j \in J}$ eine Familie linearer Operatoren. Dann sind die folgenden beiden Eigenschaften äquivalent:

1. *Für alle $x \in X$ ist $\{f_j(x) : j \in J\}$ eine beschränkte Menge in Y.*
2. *Es gilt $\lim_{x \to 0} f_j(x) = 0$ gleichmäßig in $j \in J$.*

Theorem 8.31. *In $D'(G)$ stimmen schwache und starke Konvergenz überein.*

Beweis. Wir setzen die schwache Konvergenz von $\{f_j\}_j$ gegen f in $D'(G)$ voraus. Es sei B eine beschränkte Menge aus $C_0^\infty(G)$. Nach Theorem 8.29 muß diese Menge in einem $D(K)$ mit $K \subset G$ enthalten sein. Da $D(K)$ ein Montelraum ist, erweist sich B sogar als kompakte Menge.
Das Theorem ist vollständig bewiesen wenn wir die gleichmäßige Konvergenz von $\{f_j\}_j$ auf B zeigen können. Natürlich ist $f_j(\phi) - f(\phi)$ beschränkt für alle $\phi \in D(K)$. Nach Theorem 8.30 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine (Null)Umgebung U in $D(K)$ mit $\sup_{j,\phi \in U} |f_j(\phi) - f(\phi)| < \varepsilon$. Nun nutzen wir die Kompaktheit von B. Es gibt demnach Elemente $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_k$ mit $B \subset \cup_{l=1}^k (\phi_l + U)$. Damit folgt aber

$$\sup_{\phi \in B} |f_j(\phi) - f(\phi)| \leq \sum_{l=1}^{k} |f_j(\phi_l) - f(\phi_l)| + k\varepsilon.$$

Wegen der vorausgesetzten schwachen Konvergenz strebt der erste Summand für $l \to \infty$ gegen 0. Also konvergiert $\{f_j\}_j$ auf B gleichmäßig gegen f, also stark in $D'(G)$. □

Aufgabe 26: Gilt die Aussage von Theorem 8.31 für den Raum $\mathcal{E}'(G)$ der Distributionen mit kompakten Träger? Welche Überlegungen muß man anstellen?

Wenden wir uns schließlich noch den bidualen Räumen von $C_0^\infty(G)$ und von $C^\infty(G)$ zu. Abstrakt definiert werden diese durch die Beziehungen $\Phi : u \in D'(G) \to u(\phi) \in \mathbb{C}$ zu einem festen vorgelegten $\phi \in C_0^\infty(G)$ bzw. $\Phi : u \in \mathcal{E}'(G) \to u(\phi) \in \mathbb{C}$ zu einem festen vorgelegten $\phi \in C^\infty(G)$. Damit wird durch Φ ein lineares Funktional auf $D'(G)$ bzw. auf $\mathcal{E}'(G)$ erzeugt. Die bidualen Räume besitzen nun folgende Eigenschaften:

Theorem 8.32.

1. *Das starke Dual von $D'(G)$ stimmt mit dem Raum $C_0^\infty(G)$ überein. Damit ist der Raum $C_0^\infty(G)$ reflexiv.*
2. *Das starke Dual von $\mathcal{E}'(G)$ stimmt mit dem Raum $C^\infty(G)$ überein. Damit ist der Raum $C^\infty(G)$ reflexiv.*
3. *Der Raum $D'(G)$ ist ein Montelraum, d.h. jede abgeschlossene und beschränkte Menge ist kompakt.*
4. *Der Raum $\mathcal{E}'(G)$ ist ein Montelraum, d.h. jede abgeschlossene und beschränkte Menge ist kompakt.*

Wir werden diesen Satz nicht im Detail beweisen. Wir kennen aber schon die Montelraum-Eigenschaft von $C_0^\infty(G)$ und von $C^\infty(G)$. Es gilt dann ein allgemeines Resultat, daß jeder Montelraum das starke Dual eines Montelraumes ist. Damit ergeben sich schon die letzten beiden Aussagen.